STUDIEN ZUR INTEGRATION HOMOGENER LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DURCH BESTIMMTE INTEGRALE.

INAUGURAL-DISSERTATION

VERFASST UND DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER KGL. BAYER. JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT AM 8. JANUAR 1914

VON

SIEGFRIED WEIKERSHEIMER
AUS GROSSLANGHEIM.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1914.

REFERENT: Prof. Dr. Georg Rost.

DEM ANDENKEN

MEINER LIEBEN MUTTER

IN DANKBARKEIT GEWIDMET.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549815_0213

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung und Vorbemerkungen 1

Erstes Kapitel. Ersatzintegrale 6

§ 1. Definition und Theorie der Ersatzintegrale. 6

Zweites Kapitel. Verhalten spezieller Integrale bei Umläufen . . 12

§ 2. Das hypergeometrische Integral
$\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}dz$; $\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x^{m})^{\gamma}dz$. 12

§ 3. Integrale vom Typus $\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-x^{2})^{\delta}dz$ 15

§ 4. Integrale vom Typus $\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-x^{2})^{\delta}(z-x^{3})^{\varepsilon}dz$ 19

§ 5. Das Integral $\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x^{h_1})^{\varrho_1}(z-x^{h_2})^{\varrho_2}\ldots(z-x^{h_n})^{\varrho_n}dz$. 22

§ 6. Integrale vom Typus $\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-(x+1))^{\delta}dz$,
$\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-(x+1))^{\delta}(z-(x^{2}+1))^{\varepsilon}dz$ und
$\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-(x+1))^{\delta}(z-(x^{2}+1))^{\varepsilon}(z-(x^{3}+1))^{\zeta}dz$ 26

§ 7. Das Integral
$\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-(x^{k_1}+1))^{\sigma_1}(z-(x^{k_2}+1))^{\sigma_2}\ldots(z-(x^{k_l}+1))^{\sigma_l}dz$. 31

Drittes Kapitel. Das allgemeine Integral. 33

§ 8. Aufstellung des allgemeinen Integrals und Verhalten desselben bei Umläufen 33

Literaturverzeichnis.

P. A. Nekrassoff, „Über lineare Differentialgleichungen, welche mittels bestimmter Integrale integriert werden," Math. Ann. **38** (1891).

F. Klein, „Über die hypergeometrische Funktion," Vorlesung gehalten im W.-S. 1893/94, Neuer Abdruck 1906. (Klein, a. a. O. bezieht sich stets auf diese Arbeit.)

F. Klein, „Über Normierung der linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung," Math. Ann. **38** (1891).

E. Goursat, „Sur une classe de fonctions représentées par des integrales définies," Acta Math. **2** (1883).

L. Pochhammer, „Über ein Integral mit doppeltem Umlauf," Math. Ann. **35** (1890), S. 470—494.

L. Pochhammer, „Zur Theorie der Eulerschen Integrale," Math. Ann. **35** (1890), S. 495—526.

C. Jordan, „Cours d'analyse" t. III, p. 241ff. (Paris 1887).

C. Schellenberg, „Neue Behandlung der hypergeometrischen Funktion auf Grund ihrer Definition durch das bestimmte Integral," Inaug.-Diss., Göttingen 1892.

L. Schlesinger, „Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen," Sammlung Schubert XIII.

Einleitung und Vorbemerkungen.

Bekanntlich wird die hypergeometrische Differentialgleichung durch bestimmte Integrale von der Form:

$$\int_g^h z^\alpha (z-1)^\beta (z-x)^\gamma dz$$

befriedigt, wobei die Integrale als Funktionen des Parameters x aufgefaßt werden und die Grenzen g und h irgend zwei der Punkte:

$$0,\ 1,\ x,\ \infty$$

bedeuten.[1]) Diese Integrale sind indes nur definiert, solange die Konvergenzbedingungen:

$$\Re(\alpha) > -1, \quad \Re(\beta) > -1, \quad \Re(\gamma) > -1$$

erfüllt sind, wobei unter $\Re(\mu)$ der reelle Teil der komplexen Größe μ zu verstehen ist. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so verlieren die bestimmten Integrale ihre Bedeutung; an ihrer Stelle führt man dann Schleifenintegrale ein, das sind Integrale, die über einfache Schleifen oder Doppelumläufe erstreckt sind. Eine einfache Schleife ist eine geschlossene Kurve, welche von einem gewöhnlichen oder einem singulären Punkt ausgeht, für dessen zugehörigen Exponenten die Konvergenzbedingung erfüllt ist, einen andern, singulären Punkt, für dessen Exponenten die Konvergenzbedingung nicht erfüllt ist, umkreist und zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Der Doppelumlauf[2]) ist eine sowohl auf der z-Ebene als auch auf der Riemannschen Fläche des Integranden geschlossene Kurve, welche zwei singuläre Punkte, für deren zugehörige Exponenten die Konvergenzbedingungen nicht erfüllt sind, umkreist, und zwar jeden zuerst im positiven und dann im negativen Sinn. Der Integrand kommt mit demselben Wert in dem Endpunkt an, mit dem er von diesem ausgegangen ist. Die Integrale, welche über Doppel-

---

1) Die einschlägige Literatur ist sehr umfangreich; eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Abhandlungen gibt Schellenberg in der Einleitung zu seiner Dissertation: „Neue Behandlung der hypergeometrischen Funktion usw." Göttingen 1892, S. 5.

2) Vgl. Klein, Vorlesung über die hypergeometrische Funktion, 1906, S. 116.

umläufe erstreckt sind, werden niemals illusorisch.[1]) Die Vieldeutigkeit der zu integrierenden Funktion kann man durch die Festsetzung beheben, es sei die Potenz $x^\mu = e^{\mu \log x}$, wobei $\log x$ den Hauptwert bedeuten soll. Eingeführt und angewandt wurden die Doppelumlaufintegrale von C. Jordan[2]) und L. Pochhammer[3]). Die Idee selbst geht wohl auf Riemann[4]) zurück.

Außer der hypergeometrischen Differentialgleichung waren noch andere Typen von homogenen linearen Differentialgleichungen, z. B. die Laplacesche[5]), bekannt, denen bestimmte Integrale genügen. E. Goursat[6]) hat dann die Frage aufgeworfen, was für Differentialgleichungen lassen sich durch bestimmte Integrale von der Form:

$$\int_g^h (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\dots(z-a_m)^{\alpha_m}(z-z_1)^{\zeta_1}(z-z_2)^{\zeta_2}\dots(z-z_n)^{\zeta_n}dz$$

integrieren, wobei die z_ν $[\nu = 1, 2, \dots, n]$ Funktionen von x und die a_μ und α_μ $[\mu = 1, 2, \dots, m]$ sowie die ζ_ν $[\nu = 1, 2, \dots, n]$ komplexe Größen bedeuten. Die Grenzen g und h sind zwei beliebige der Konstanten bzw. der Funktionen $a_1, a_2, \dots, a_m$; $z_1, z_2, \dots, z_n$. Integrale allgemeinster Art hat P. A. Nekrassoff[7]) untersucht und damit die Zahl der durch solche Integrale integrierbaren Differentialgleichungen erweitert. Das Ergebnis seiner Untersuchungen ist folgendes: das Integral[8]):

$$\int_L (z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}\dots(z-z_n)^{\lambda_n}(z-\mathfrak{z}_1)^{\zeta_1} e^{\frac{u_{11}}{z-\mathfrak{z}_1}+\frac{u_{12}}{(z-\mathfrak{z}_1)^2}+\dots+\frac{u_{1n_1}}{(z-\mathfrak{z}_1)^{n_1}}}$$
$$(z-\mathfrak{z}_2)^{\zeta_2} e^{\frac{u_{21}}{z-\mathfrak{z}_2}+\frac{u_{22}}{(z-\mathfrak{z}_2)^2}+\dots+\frac{u_{2n_2}}{(z-\mathfrak{z}_2)^{n_2}}}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(z-\mathfrak{z}_m)^{\zeta_m} e^{\frac{u_{m1}}{z-\mathfrak{z}_m}+\frac{u_{m2}}{(z-\mathfrak{z}_m)^2}+\dots+\frac{u_{mn_m}}{(z-\mathfrak{z}_m)^{n_m}}} dz,$$

---

1) Vgl. Pochhammer, Über ein Integral mit doppeltem Umlauf, Math. Ann. **35** (1890), S. 470.

2) Cours d'analyse, III, Paris 1887, p. 241 ff.

3) Math. Ann. **35**, **36** und **37**.

4) Vgl. die Bemerkung Kleins in Math. Ann. **38**, S. 148.

5) Die Integrale, welche dieser Gleichung genügen, gehören zu dem von Nekrassoff behandelten Typus.

6) Sur une classe de fonctions représentées par des integrales définies, Acta Math. **2**, Stockholm 1883.

7) Über lineare Differentialgleichungen, welche mittels bestimmter Integrale integriert werden. Math. Ann. **38**; vgl. Bemerkung 5).

8) Dieses Integral kann als Grenzfall des Goursatschen aufgefaßt werden vgl. Klein, Über die hypergeometrische Funktion, S. 154.

das erstreckt ist über den geschlossenen Weg L, längs dessen die zu integrierende Funktion stetig ist, und in welchem die z_ν, ζ_μ und $u_{\mu n_\mu}$ $[\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n]$ Funktionen von x bedeuten, genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung k^{ter} Ordnung, wobei

$$k \leqq \sum_1^m{}^{\mu} n_\mu + m + n - 1.$$

Das Ergebnis von Nekrassoff umfaßt das von Goursat; wir erhalten das Goursatsche, wenn wir die n_μ null setzen. Die Differentialgleichungen, denen die von uns betrachteten Integrale genügen, besitzen nach Goursat S. 48 als Koeffizienten rationale Funktionen von x. Nekrassoff macht bei seinen Untersuchungen ausgiebigen Gebrauch von Schleifenintegralen; damit fallen natürlich auch die Konvergenzbedingungen weg, welche Goursat um Sinn und Bedeutung der Integrale willen machen muß. In dieser Arbeit sollen nur dort Schleifenintegrale eingeführt werden, wo es zur Existenz und Definition von Integralen nötig ist. Die Schleifenintegrale lassen sich durch gewöhnliche Integrale ausdrücken, solange letztere Sinn haben. Relationen, die zwischen bestimmten Integralen bestehen, geben auch Relationen für Schleifenintegrale auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung, wobei zu bemerken ist, daß unsere Integrale analytisch fortgesetzt werden als ganze transzendente Funktionen der Exponenten. Die Integrationswege fassen wir mit Nekrassoff[1]) als elastische Fäden auf, die von einem Verzweigungspunkt zum andern gespannt sind.[2]) Die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind durch zylindrische Stäbe isoliert, welche auf der z-Ebene senkrecht stehen und deren Achsen durch diese Punkte hindurchgehen. Kommt ein sich bewegender Verzweigungspunkt z_ν an den Faden, so deformiert er diesen, indem er ihn während seiner Bewegung vor sich hertreibt. Betrachten wir das Integral zwischen zwei festen Verzweigungspunkten, so werden im allgemeinen Fall die Funktionen z_ν die Endpunkte umkreisen.

Als singuläre Punkte des Integrals gelten nach Nekrassoff[3]) diejenigen und auch nur die Punkte, für welche zwei der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ einander gleich werden. Die übrigen von Nekrassoff angegebenen Gruppen von singulären Punkten kommen für die von uns betrachteten Integrale (vgl. weiter unten) nicht in Betracht. Daß auch

1) a. a. O. S. 540.

2) Diese Auffassungsweise ist ebenfalls Riemann zuzuschreiben; vgl. Nekrassoffs Bem. a. a. O. S. 512.

3) a. a. O. S. 542.

der Punkt ∞ ein singulärer Punkt unserer Integrale ist, erkennt man unmittelbar durch Ausführung der Transformation $z = \frac{1}{t}$.[1])

In der vorliegenden Arbeit, in welcher wir uns mit Integralen der auf Seite 3 betrachteten Art befassen werden, seien die z_ν als ganze rationale Funktionen von x vorausgesetzt; wir sehen auch ab von den Exponentialfunktionen, durch welche der Integrand verallgemeinert werden kann. Wir wollen für das allgemeinste Integral dieser Art die Umlaufrelationen berechnen d. h. die Werte der Integrale, nachdem die unabhängige Variable x einen Umlauf um eine singuläre Stelle gemacht hat. Diese werden aus den Wegdeformationen erhalten, wie sie auf oben angegebene Weise entstehen. Es ergibt sich so folgende Aufgabe: es sei $x = 0$ eine singuläre Stelle in dem angegebenen Sinne, so fragen wir uns, welche Abänderungen erleiden die einzelnen Integrale, wenn x einen Umlauf um 0 macht. Es beschreiben dann die Punkte z_ν geschlossene Kurven um feste Zentren, die beliebig klein gemacht werden können, wenn x in genügender Nähe von $x = 0$ bleibt. Ein Integrationsweg wird nur durch solche singuläre Punkte wesentlich deformiert, welche ihrerseits den Anfangs- bzw. Endpunkt des Integrals umkreisen. Um den allgemeinsten Fall zu umfassen, müssen wir also annehmen, daß das Integral einerseits irgendeine Anzahl von Faktoren enthält von der Form $z_\nu = z - r_\nu^{(h_\nu)}(x)$, wobei $r_\nu^{(h_\nu)}(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist, die für $x = 0$ von der h_ν^{ten} Ordnung verschwindet; andererseits muß es eine Anzahl von Faktoren enthalten, die so beschaffen sind, daß sich beliebig viele Punkte beim Umlauf von x um 0 um einen zweiten festen singulären Punkt a_μ als obere Grenze des Integrals herumbewegen, also die Form besitzen $z - (s_\lambda^{(k_\lambda)}(x) + a_\mu)$, wobei $u_\lambda = s_\lambda^{(k_\lambda)}(x) + a_\mu$ beim Umlauf von x um 0 den Punkt a_μ k_λ-mal umkreist. Die übrigen im allgemeinen Integral auftretenden Faktoren haben auf das Verhalten der Grundintegrale[2]) keinen Einfluß. Wir zerlegen demgemäß die Arbeit in zwei Teile; zunächst untersuchen wir in den §§ 2—4 (inklusive) die durch sukzessive Erweiterung gebildeten speziellen Integrale, deren Integrationsweg nur in der unmittelbaren Umgebung von $x = 0$ gestört wird, um in § 5 zu dem allgemeinen

1) Ich möchte gleich an dieser Stelle auf den interessanten, vermutlich allgemein gültigen Satz hinweisen, daß jede singuläre Stelle des Integrals — singulär im Nekrassoffschen Sinne — auch eine singuläre Stelle zum mindesten ein Nebenpunkt der Differentialgleichung ist, welcher das bestimmte Integral genügt. Diesbezügliche Untersuchungen habe ich an einigen speziellen Beispielen angestellt und den Satz bestätigt gefunden.

2) Siehe weiter unten.

Typus dieser Gruppe von Integralen aufzusteigen. Im § 6 behandeln wir die Spezialintegrale, bei denen sich die Punkte z_ν um die obere Grenze des Integrals — als solche wählen wir den Punkt 1 — häufen und daher beim Umlauf von x um 0 eine weitere Störung des Integrationswegs in der Nähe dieser Stelle verursachen. In § 7 betrachten wir dann den allgemeinen Typus dieser zweiten Gruppe von Integralen. Durch Kombination der allgemeinen Typen der beiden Gruppen von Integralen ergibt sich sodann das allgemeinste Integral in § 8, wo wir auch das Verhalten desselben bei Umläufen der unabhängigen Veränderlichen um eine singuläre Stelle untersuchen; als solche ist der Punkt 0 gewählt. Dieses Integral hat im wesentlichen die Form:

$$\int z^\alpha (z-a_\mu)^{\alpha_\mu}(z-x)^\xi \prod_1^n{}_\nu (z-z_\nu)^{\varrho_\nu} \prod_1^l{}_\lambda (z-u_\lambda)^{\varrho_\lambda} dz,$$

wobei die z_ν und u_λ die oben erwähnten Funktionen von x sind. Als System von Grundintegralen[1]) wählen wir die Integrale, die von einem festen, umkreisten Verzweigungspunkt, z. B. 0, ausgehen und sich nach den Punkten a_μ, x, z_ν und u_λ erstrecken. Nach Nekrassoff[2]) gibt es im allgemeinen d. h. für allgemeine Werte der Exponenten $l+n+2$ linear unabhängige Integrale. In den Ausnahmefällen, die vor allem bei ganzzahligen Exponenten auftreten — und diese werden bei Nekrassoff wie bei Goursat ausgeschlossen — lassen sich, wie wir in Kapitel I zeigen werden, für die linear abhängigen unter den Integralen Ersatzintegrale angeben, die mit den übrigen linear unabhängigen Integralen ein volles System bilden.

Was die Bezeichnungsweise betrifft, so sei $\int^{(a,b,a-,b-)}$ das Integral, erstreckt über den Doppelumlauf $(a, b, a-, b-)$.[3]) Für das bestimmte Integral $\int_a^b$ wollen wir die Bezeichnung J_{ab} einführen. $\bar{\int}^{(a,b,a-,b-)}$ und $\bar{J}_{ab}$ seien die Werte der Integrale $\int^{(a,b,a-,b-)}$ bzw. J_{ab}, nachdem x einen positiven Umlauf um irgendeine singuläre Stelle des Integrals gemacht hat.

---

1) Vgl. Goursat, a. a. O. S. 18 und Nekrassoff, a. a. O. § 1.
2) a. a. O. S. 517.
3) Vgl. Pochhammer, Math. Ann. **35**, S 472.

Erstes Kapitel.

Ersatzintegrale.

§ 1. Definition und Theorie der Ersatzintegrale.

Die homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten wird bekanntlich durch die Exponentialfunktionen $e^{r_\nu x}$ $[\nu = 1, 2, \ldots, n]$ integriert, wobei r_ν die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind. Sind sämtliche Wurzeln r_ν voneinander verschieden, so sind die Integrale linear unabhängig; sind indes p von diesen n Wurzeln einander gleich, gleich r, so sind p Integrale identisch, also $p - 1$ unbrauchbar; für diese bilden die durch Differentiation nach r erhaltenen Funktionen $x^{p-1}e^{rx}$, $x^{p-2}e^{rx}$, $\ldots$, xe^{rx} einen Ersatz. Ähnliches gilt von den bestimmten Integralen, welche Lösungen einer Differentialgleichung vorstellen. Wie schon in der Einleitung erwähnt, hat P. A. Nekrassoff in der zitierten Abhandlung gezeigt, daß die von ihm auf S. 533 aufgestellte homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + qy = 0 \tag{1}$$

durch n im allgemeinen d. h. für allgemeine Werte der Exponenten linear unabhängige bestimmte Integrale integriert werden kann, welche jedoch für bestimmte Werte der Exponenten (Parameter) linear abhängig werden können. Wir wollen nun zeigen, wie man durch Differentiation nach dem betreffenden Parameter Ersatzintegrale schaffen kann, d. h. Integrale, welche ebenfalls die Differentialgleichung befriedigen und mit den übrigen linear unabhängigen Integralen ein Fundamentalsystem bilden. Wir denken uns die Parameter mit Ausnahme von einem festgehalten, der bewegliche Parameter sei α. Für einen bestimmten Wert von $\alpha = \alpha_0$ sollen die Integrale nicht mehr linear unabhängig sein. Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Integrale der Gleichung (1), so ist bekanntlich nach dem Satz von Abel[1]) die Wronskische Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = Ce^{-\int_\alpha^x p\,dx} \tag{2}$$

[2])

1) Crelles Journal, Bd. 2 (Werke I, S. 251).

2) Für allgemeine Werte von α ist $C \neq 0$.

wobei C eine Funktion von α ist. Wird C null von der ersten Ordnung, so besteht zwischen den y nur eine lineare Abhängigkeit, also die Relation:

$$\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n = 0, \tag{3}$$

wobei wir annehmen, daß γ_1 von Null verschieden ist, also gleich 1 gesetzt werden kann. Dann ist:

$$\begin{vmatrix} y_1 + \gamma_2 y_2 & + \cdots + \gamma_n y_n & y_2 & \cdots y_n \\ y_1' + \gamma_2 y_2' & + \cdots + \gamma_n y_n' & y_2' & \cdots y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} + \gamma_2 y_2^{(n-1)} & + \cdots + \gamma_n y_n^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = C e^{-\int_a^x p\,dx} \tag{4}$$

Durch Differentiation der Gleichung (4) nach α folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \gamma_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} & + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n}{\partial \alpha} & + y_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha} & + y_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial \alpha} & + \cdots + y_n \frac{\partial \gamma_n}{\partial \alpha}, & y_2 & \cdots y_n \\ \frac{\partial y_1'}{\partial \alpha} + \gamma_2 \frac{\partial y_2'}{\partial \alpha} & + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n'}{\partial \alpha} & + y_2' \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha} & + y_3' \frac{\partial \gamma_3}{\partial \alpha} & + \cdots + y_n' \frac{\partial \gamma_n}{\partial \alpha}, & y_2' & \cdots y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \gamma_2 \frac{\partial y_2^{(n-1)}}{\partial \alpha} & + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n^{(n-1)}}{\partial \alpha} & + y_2^{(n-1)} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha} & + y_3^{(n-1)} \frac{\partial \gamma_3}{\partial \alpha} & + \cdots + y_n^{(n-1)} \frac{\partial \gamma_n}{\partial \alpha}, & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial C}{\partial \alpha} e^{-\int_a^x p\,dx} + C \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^{-\int_a^x p\,dx} \right)$$

oder:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} & + \gamma_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} & + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n}{\partial \alpha} & y_2 & \cdots y_n \\ \frac{\partial y_1'}{\partial \alpha} & + \gamma_2 \frac{\partial y_2'}{\partial \alpha} & + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n}{\partial \alpha} & y_2' & \cdots y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1^{(n-1)}}{\partial \alpha} & + \gamma_2 \frac{\partial y_2^{(n-1)}}{\partial \alpha} & + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n^{(n-1)}}{\partial \alpha} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{\partial C}{\partial \alpha} e^{-\int_a^x p\,dx} \tag{6}$$

Nach Voraussetzung verschwindet C von der ersten Ordnung, also ist $\frac{\partial C}{\partial \alpha} = 0$; wir wollen nun beweisen, daß dann:

$$(E) \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \gamma_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n}{\partial \alpha}$$

der Differentialgleichung (1) genügt und mit $y_2, y_3, \ldots, y_n$ ein volles System von (1) bildet.

Beweis: Die Differentialgleichung (1) hat sicher n linear unabhängige Lösungen. $y_2, y_3, \ldots, y_n$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig, also gibt es eine Lösung Y, welche mit diesen $n-1$ Lösungen

ein Fundamentalsystem bildet. Wir betrachten nun die inhomogene Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung für Y:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} Y & Y' & \cdots & Y^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \gamma e^{-\int_a^x p\,dx}$$

Indem wir Y mit einem geeigneten von x unabhängigen Faktor multiplizieren, können wir stets erreichen, daß $\gamma = \frac{\partial C}{\partial \alpha}$ wird. Die inhomogene Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} z & z' & \cdots & z^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{\partial C}{\partial \alpha} e^{-\int_a^x p\,dx}$$

hat dann als allgemeines Integral den Ausdruck:

$$(A)\quad Y + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n .$$

Da aber (E) eine Lösung der inhomogenen Differentialgldichung ist, so läßt es sich auch in der Form (A) darstellen und ist also eine Lösung der Differentialgleichung (1), welche mit den $n-1$ übrigen Integralen ein Fundamentalsystem bildet.

Wir wollen nun den Fall behandeln, wo C Null wird von der m^{ten} Ordnung; dann ist $C=0$, $\frac{\partial C}{\partial \alpha}=0$, $\frac{\partial^2 C}{\partial \alpha^2}=0$, …, $\frac{\partial^{m-1} C}{\partial \alpha^{m-1}}=0$, $\frac{\partial^m C}{\partial \alpha^m} \neq 0$. Wir gehen wieder von dem Abelschen Satz aus und bilden wie oben die Gleichung (6):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \gamma_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n}{\partial \alpha} & y_2 & \cdots & y_n \\ \frac{\partial y_1'}{\partial \alpha} + \gamma_2 \frac{\partial y_2'}{\partial \alpha} + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n'}{\partial \alpha} & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \gamma_2 \frac{\partial y_2^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n^{(n-1)}}{\partial \alpha} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{\partial C}{\partial \alpha} e^{-\int_a^x p\,dx}$$

oder:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \cdots & u_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Nun sind zwei Unterfälle zu unterscheiden, denn das Verschwinden der Determinante (9) kann bewirkt werden: 1. durch eine lineare Abhängigkeit zwischen $y_2, y_3, \ldots, y_n$, 2. durch eine lineare Relation, die zwischen u_1 und den Integralen $y_2, y_3, \ldots, y_n$ besteht.

Ad 1. $y_2, y_3, \ldots, y_n$ sind linear abhängig, wir führen dann für die linear abhängigen unter den Integralen $y_2, y_3, \ldots, y_n$ neue Integrale ein und bezeichnen die Gesamtheit der $n-1$ jetzt linear unabhängigen Integrale mit Y. Nun läßt sich nach Voraussetzung y_1 ersetzen durch:

$$y_1 + \delta_2 Y_2 + \delta_3 Y_3 + \cdots + \delta_n Y_n,$$

wobei die δ Null sind, wenn die y von den Y verschieden sind. Wir können es ferner dabei so einrichten, daß auch u_1 von den $Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ linear unabhängig ist; denn wenn u_1 der Differtialgleichung nicht genügen würde, so könnte es von den Y nicht linear abhängig sein; genügt es aber der Differentialgleichung, so kann man immer die linear unabhängigen unter den $Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ und u_1 zu einem vollen Fundamentalsystem ergänzen. Wir betrachten nun wieder die Determinante:

$$(10)\quad \begin{vmatrix} y_1 + \delta_2 Y_2 & + \cdots + \delta_n Y_n & Y_2 & \cdots Y_n \\ y_1' + \delta_2 Y_2' & + \cdots + \delta_n Y_n' & Y_n' & \cdots Y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} + \delta_2 Y_2^{(n-1)} & + \cdots + \delta_n Y_n^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} \ldots & Y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \bar{C} e^{-\int_a^x p\,dx}$$

und differentiieren nach α. Wir erhalten damit ein erstes Ersatzintegral, welches sich darstellen läßt in der Form:

$$(11)\quad (E_1)\quad u_1 = \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \gamma_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} + \cdots + \gamma_n \frac{\partial y_n}{\partial \alpha}.$$

Ad 2. In diesem Falle besteht die Relation:

$$u_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3 + \cdots + \delta_n y_n = 0.$$

Aus der Determinante:

$$(12)\quad \begin{vmatrix} u_1 + \delta_2 y_2 & + \delta_3 y_3 & + \cdots + \delta_n y_n & y_2 & \cdots y_n \\ u_1' + \delta_2 y_2' & + \delta_3 y_3' & + \cdots + \delta_n y_n' & y_2' & \cdots y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{(n-1)} + \delta_2 y_2^{(n-1)} & + d_3 y_3^{(n-1)} & + \cdots + \delta_n y_n^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{\partial C}{\partial \alpha} e^{-\int_a^x p\,dx}$$

entsteht durch Differentiation nach α:

$$(13)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \delta_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} + \cdots + \delta_n \frac{\partial y_n}{\partial \alpha} & y_2 & \cdots y_n \\ \frac{\partial u_1'}{\partial \alpha} + \delta_2 \frac{\partial y_2'}{\partial \alpha} + \cdots + \delta_n \frac{\partial y_n'}{\partial \alpha} & y_2' & \cdots y_n' \\ \cdots\cdots\cdots\

durch Differentiation nach α:

$$(16)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{m-1}}{\partial \alpha}+\tau_2\frac{\partial y_2}{\partial \alpha} & +\tau_3\frac{\partial y_3}{\partial \alpha} & +\cdots+\tau_n\frac{\partial y_n}{\partial \alpha} & y_2 & \cdots y_n \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial \alpha}+\tau_2\frac{\partial y_2'}{\partial \alpha} & +\tau_3\frac{\partial y_3'}{\partial \alpha} & +\cdots+\tau_n\frac{\partial y_n}{\partial \alpha} & y_2' & \cdots y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_{m-1}^{(n-1)}}{\partial \alpha}+\tau_2\frac{\partial y_2^{(n-1)}}{\partial \alpha} & +\tau_3\frac{\partial y_3^{(n-1)}}{\partial \alpha} & +\cdots+\tau_n\frac{\partial y_n^{(n-1)}}{\partial \alpha} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{\partial^m C}{\partial \alpha^m} e^{-\int_a^x p\,dx} \neq 0.$$

Nun können wir genau so schließen wie in dem Fall, wo C Null wird von der ersten Ordnung. $y_2, y_3, \ldots, y_n$ sind $n-1$ Lösungen der Differentialgleichung (1), welche voneinander linear unabhängig sind; also gibt es eine Lösung v, welche mit diesen $n-1$ Integralen ein Fundamentalsystem bildet.

Wir betrachten nun wieder die inhomogene Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung für v:

$$\begin{vmatrix} v & v' & \ldots & v^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \tau e^{-\int_a^x p\,dx}$$

Durch Multiplikation von v mit einem konstanten, d. h. von x unabhängigen Faktor kann man immer erreichen, daß $\tau = \frac{\partial^m C}{\partial \alpha^m}$ wird. Die entstehende inhomogene Differentialgleichung, welche der Gleichung (8) entspricht, besitzt als allgemeines Integral den Ausdruck:

$$(A_m) \qquad v + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n .$$

Da aber:

$$(E_m) \qquad \frac{\partial u_{m-1}}{\partial \alpha} + \tau_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} + \tau_3 \frac{\partial y_3}{\partial \alpha} + \cdots + \tau_n \frac{\partial y_n}{\partial \alpha} = u_m$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist, so läßt sich dieser Ausdruck auch in der Form (A_m) darstellen und ist also eine Lösung der Differentialgleichung (1), welche mit den $n-1$ übrigen Integralen ein Fundamentalsystem bildet.

Zweites Kapitel

Verhalten spezieller Integrale bei Umläufen.

§ 2. Das hypergeometrische Integral $\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}dz$.

Dieses Integral besitzt die singulären Punkte:

$$0, 1, \infty .$$

Von den sechs Integralen:

$$J_{1\infty}, \quad J_{0x}$$
$$J_{0\infty}, \quad J_{1x}$$
$$J_{01}, \quad J_{\infty x},$$

welche der hypergeometrischen Differentialgleichung genügen, sind indes nur zwei linear unabhängig. Wie Pochhammer[1]) zeigt, bilden die Integrale, so wie sie nebeneinander gestellt sind, bzw. die zu

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \infty$$

gehörigen kanonischen Fundamentalsysteme.

x möge mit sehr kleinem Radius die singuläre Stelle 0 umkreisen, es treibt den Faden 0 —— 1 vor sich her und deformiert ihn, wie nebenstehende Figur zeigt:

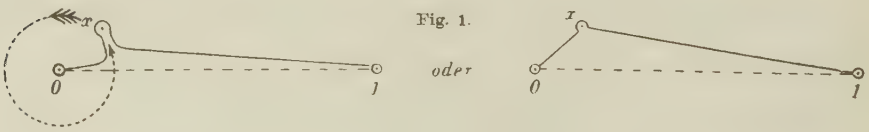


Fig. 1.

Es ist daher:

$$\bar{J}_{10} = J_{1x} + e^{2\pi i\gamma} J_{x0}$$

oder:

$$\bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma} - 1) J_{0x}. \tag{1}$$

Um den Wert für $\bar{J}_{0x}$ zu berechnen, bestimmen wir $\bar{J}_{1x}$ und addieren diesen Wert zu $\bar{J}_{01}$. Wir werden überhaupt, um die Umlaufrelationen von Integralen aufzustellen, deren Grenzen variabel sind, oder von welchen eine variabel ist, die andere umkreist wird, zunächst die Werte derjenigen Integrale nach dem Umlauf berechnen, die von einem festen singulären oder gewöhnlichen Punkt ausgehen und sich nach dem beweglichen oder umkreisten Punkten erstrecken, und durch Kombination die Werte jener Integrale bestimmen.

1) Math. Ann. **35** (1890), S. 491.

$$\bar{J}_{1x} = J_{1x} + e^{2\pi i\gamma} J_{x0} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} J_{0x}, \tag{1''}$$

folglich ist:

$$\bar{J}_{0x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} J_{0x}. \tag{2}$$

Im folgenden werden wir immer nur die Relationen betrachten, welche entstehen, wenn x einen Umlauf macht um 0. Diese Relationen gelten allgemein, d. h. auch wenn die Exponenten den Konvergenzbedingungen nicht genügen, sofern wir nur unter J_{01} und J_{0x} nicht die bestimmten Integrale verstehen, sondern die durch die Doppelumlaufintegrale $\int^{(0,1,0-,1-)}$ und $\int^{(0,x,0-,x-)}$ definierten analytischen Funktionen:

$$J_{01} = \frac{\int^{(0,1,0-,1-)}}{(e^{2\pi i\alpha}-1)(e^{2\pi i\beta}-1)} \text{ und } J_{0x} = \frac{\int^{(0,x,0-,x-)}}{(e^{2\pi i\alpha}-1)(e^{2\pi i\gamma}-1)}.$$ [1])

Wir kombinieren nun die Integrale J_{01} und J_{0x} so, daß sie sich beim Umlauf von x um 0 rein multiplikativ verhalten, sofern sie nicht schon an und für sich diese Eigenschaft besitzen. J_{0x} verhält sich rein multiplikativ. Es sei nun:

$$\bar{J}_{01} + a\bar{J}_{0x} = \varrho(J_{01} + aJ_{0x}), \tag{5}$$

wobei a und ϱ noch zu bestimmende konstante Größen sind. Setzt man für $\bar{J}_{01}$ und $\bar{J}_{0x}$ die in (1) und (2) gefundenen Werte ein, so ergibt sich:

$$J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma}-1) + J_{0x}\cdot a\, e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} = \varrho J_{01} + \varrho a J_{0x}. \tag{6}$$

Lassen wir x gegen 0 konvergieren, so folgt daraus: $\varrho = 1$; ferner folgt:

$$a = -\frac{e^{2\pi i\gamma}-1}{e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}-1}.$$

Es ist demnach:

$$[e^{2\pi i(\alpha+\gamma)}-1]\bar{J}_{01} - (e^{2\pi i\gamma}-1)\bar{J}_{0x} = [e^{2\pi i(\alpha+\gamma)}-1]J_{01} - (e^{2\pi i\gamma}-1)J_{0x}. \tag{7}$$

Setzen wir:

$$J_{01}[e^{2\pi i(\alpha+\gamma)}-1] - (e^{2\pi i\gamma}-1)J_{0x} = y_1$$
$$J_{0x} = y_2,$$

so ist:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= y_1 \\ \bar{y}_2 &= e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} y_2, \end{aligned} \tag{8}$$

d. h. y_1 geht nach dem Umlauf von x um 0 in sich über, ändert sich nicht, während sich y_2 mit $e^{2\pi i(\alpha+\gamma)}$ multipliziert. Für die Potenzreihenentwicklung folgt daraus, daß y_1 mit einer Konstanten oder einer ganzzahligen Potenz von x beginnt, während das erste Glied der Reihe für y_2 die Potenz $x^{\alpha+\gamma+\nu}$ ist, wobei ν eine ganze Zahl bedeutet. Ist also

1) Vgl. Klein a. a. O., S. 171.

$\alpha + \gamma$ weder 0 noch eine ganze Zahl — und das müssen wir um der Bestimmtheit von a willen voraussetzen —, so sind y_1 und y_2, folglich auch J_{01} und J_{0x} linear unabhängig.

Ist $\alpha + \gamma$ null oder eine ganze Zahl, jedoch α und γ keine ganze Zahlen, so gehen die Formeln (1) und (2) über in:

$$\bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma} - 1)J_{0x}, \tag{1'}$$

$$\bar{J}_{0x} = J_{0x}. \tag{2'}$$

Wären J_{01} und J_{0x} linear abhängig, so müßte sein:

$$J_{01} = \omega J_{0x},$$

somit auch:

$$\bar{J}_{01} = \omega \bar{J}_{0x} = \omega J_{0x},$$

oder wenn wir für $\bar{J}_{01}$ den Wert (1') einsetzen:

$$\omega J_{0x} + (e^{2\pi i\gamma} - 1)J_{0x} = \omega J_{0x}. \tag{9}$$

Da nach Voraussetzung γ keine ganze Zahl ist, so müßte J_{0x} identisch verschwinden, was tatsächlich für Schleifenintegrale eintreten kann. Denn es ist nach Schlesinger (Einf. in die Theorie d. Diffgl.) S. 164:

$$\int^{(0,x,0-,x-)} z^\alpha (z-1)^\beta (z-x)^\gamma dz = e^{\pi i(\beta+\gamma)} x^{\alpha+\gamma+1} \mathfrak{B}(\alpha+1,\gamma+1) F(-\beta,\alpha+1,\alpha+\gamma+2;x), \tag{10}$$

wobei $\mathfrak{B}(\alpha+1,\ \gamma+1)$ das über den Doppelumlauf $(0, 1, 0-, 1-)$ erstreckte Eulersche Integral erster Art bedeutet, das verschwindet, wenn $\alpha + \gamma + 2$ eine negative ganze Zahl oder null ist[1]), und F die Gaußsche Reihe mit den Argumenten $-\beta$, $\alpha+1$, $\alpha+\gamma+2$, x vorstellt.

Wir haben also hier den Fall, daß ein Integral identisch verschwindet, so daß dafür ein Ersatzintegral eintritt, dessen Bildung indes hier auf ganz elementare Weise vollzogen werden kann; es ist nämlich der Grenzwert $\lim \dfrac{\int^{(0,x,0-,x-)}}{\mathfrak{B}(\alpha+1,\ \gamma+1)}$.

Haben überhaupt die Exponenten α, β, γ Werte, für welche die betrachteten Integrale linear abhängig werden oder identisch verschwinden, so lassen sich stets dafür auf Grund des in Kap. I bewiesenen Theorems linear unabhängige Ersatzintegrale angeben.

Wir wollen nun die Umlaufrelationen des allgemeinen Integrals:

$$\int z^\alpha (z-1)^\beta (z-x^m)^\gamma dz$$

berechnen, wobei m eine positive ganze Zahl bedeutet. Macht x einen positiven Umlauf um 0, so macht x^m m positive Umläufe um 0. Als

1) Vgl. Klein a. a. O., S. 144.

singuläre Punkte sind zu betrachten die Stellen 0 und die m^{ten} Einheitswurzeln.

$$\bar{J}_{10} = J_{1x^m} + e^{2\pi i\gamma} J_{x^m 0} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} J_{0x^m} + e^{2\pi i(\alpha+2\gamma)} J_{x^m 0} + \cdots + \\ + e^{2\pi i(\overline{m-1}\alpha+m\gamma)} J_{x^m 0}$$

$$= J_{10} + (1 - e^{2\pi i\gamma}) J_{0x^m}[1 + e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} + \cdots + e^{2\pi i\overline{m-1}(\alpha+\gamma)}]$$

oder:

$$\bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i} - 1) J_{0x^m} \frac{e^{2\pi i m(\alpha+\gamma)} - 1}{e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} - 1}. \tag{11}$$

Ferner ist:

$$\bar{J}_{1x^m} = J_{1x^m} + e^{2\pi i\gamma} J_{x^m 0} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} J_{0x^m} + \cdots + e^{2\pi i m(\alpha+\gamma)} J_{x^m 0},$$

folglich ist:

$$\bar{J}_{0x^m} = e^{2\pi i m(\alpha+\gamma)} J_{0x^m}. \tag{12}$$

Setzt man $m = 1$, so erhält man das hypergeometrische Integral; die Formeln (11) und (12) gehen über in:

$$\bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma} - 1) J_{0x} \tag{1}$$

und:

$$\bar{J}_{0x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} J_{0x}. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (11), (12) lehren uns, daß sich das Integral J_{0x} bzw. J_{0x^m}, das sich vom umkreisten Punkt 0 bis zu der ihm am nächsten gelegenen Stelle x bzw. x^m erstreckt, rein multiplikativ verhält beim Umlauf, d. h. sich mit einer Konstanten multipliziert, während das Integral J_{01} nach dem Umlauf sich linear homogen aus dem Integral J_{01} vor dem Umlauf und J_{0x} bzw. J_{0x^m} zusammensetzt.

Wir wollen nun die wandernden Verzweigungspunkte z_ν um die umkreiste Stelle 0 herum verdichten, und zwar durch Einführung des Punktes x^2 als Verzweigungspunkt des Integranden; wir erhalten dann das folgende Integral.

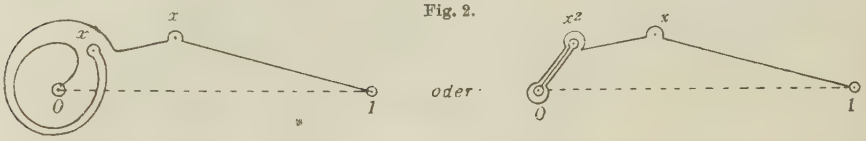
§ 3. Integrale vom Typus $\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-x^2)^{\sigma}\,dz$.

Die singulären Stellen des Integrals sind die Punkte:

$$0,\ 1,\ -1,\ \infty.$$

Wir wollen die Werte der Grundintegrale J_{01}, J_{0x} und J_{0x^2} nach dem Umlauf berechnen. x mache dabei wiederum einen positiven Umlauf um 0, dann umkreist x^2 diesen Punkt zweimal im positiven Sinne. Da $|x|$, der absolute Betrag von x, sehr klein ist, so liegt x^2 dem Punkt 0 näher als x.

Den deformierten Weg, wie er nach dem Umlauf entsteht, zeigen die folgenden Figuren:



Es ergeben sich folgende Umlaufrelationen:

$$\bar{J}_{10} = J_{1x} + e^{2\pi i\gamma} J_{xx^2} + e^{2\pi i(\gamma+\delta)} J_{x^20} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} J_{0x^2} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+2\delta)} J_{x^20},$$

geordnet nach Grundintegralen:

$$(13)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + e^{2\pi i\gamma} J_{0x^2}(e^{2\pi i\delta} - 1)(e^{2\pi i(\alpha+\delta)} + 1).$$

Ferner ist:

$$\bar{J}_{1x} = J_{1x} + e^{2\pi i\gamma} J_{xx^2} + e^{2\pi i(\gamma+\delta)} J_{x^20} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} J_{0x},$$

$$\bar{J}_{1x^2} = J_{1x} + e^{2\pi i\gamma} J_{xx^2} + e^{2\pi i(\gamma+\delta)} J_{x^20} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} J_{0x^2} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+2\delta)} J_{x^20} + e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta)} J_{0x^2},$$

so daß also:

$$\bar{J}_{0x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} J_{0x} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} J_{x^20} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+2\delta)} J_{0x^2}$$

oder:

$$(14)\quad \bar{J}_{0x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}[J_{0x} + (e^{2\pi i\delta} - 1) J_{0x^2}],$$

$$(15)\quad \bar{J}_{0x^2} = e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta)} J_{0x^2}.$$

Setzt man $\delta = 0$, so erhält man die Formeln:

$$(1)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma} - 1) J_{0x}$$

und:

$$(2)\quad \bar{J}_{0x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} J_{0x}.$$

Mit Hilfe der Formeln (13), (14) und (15) lassen sich die übrigen Integrale, die zwischen zwei Verzweigungspunkten genommen sind, durch Kombination berechnen. Z. B. ergibt sich für J_{x^2x}:

$$J_{x^2x} = \bar{J}_{x^20} + \bar{J}_{0x}.$$

Setzt man für $\bar{J}_{x^20}$ und $\bar{J}_{0x}$ die Werte (14) und (15) ein, so ergibt sich:

$$\bar{J}_{x^2x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}[J_{0x} - (e^{2\pi i(\alpha+\delta)} - e^{2\pi i\delta} + 1) J_{0x^2}]$$

oder:

$$(16)\quad \bar{J}_{x^2x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}[J_{x^2x} - e^{2\pi i\delta}(e^{2\pi i\alpha} - 1) J_{0x^2}].$$

Um die Kombinationen zu gewinnen, die sich beim Umlauf von x um 0 rein multiplikativ verhalten, setzen wir:

$$(17)\quad \begin{aligned} y_1 &= J_{01} + bJ_{0x} + cJ_{0x^2}, \\ y_2 &= J_{0x} + aJ_{0x^2}, \\ y_3 &= J_{0x^2}, \end{aligned}$$

so daß:

$$(18_1) \qquad \bar{y}_1 = \varrho y_1 = \varrho(J_{01} + bJ_{0x} + cJ_{0x^2}),$$

$$(18_2) \qquad \bar{y}_2 = \sigma y_2 = \sigma(J_{0x} + aJ_{0x^2}),$$

$$(18_3) \qquad \bar{y}_3 = \tau y_3 = \tau J_{0x^2},$$

wobei a, b, c und ϱ, σ, τ noch zu bestimmende konstante Größen sind. Substituiert man für $\bar{J}_{01}$, $\bar{J}_{0x}$, $\bar{J}_{0x^2}$ ihre Werte aus (13), (14) und (15), so folgt aus (18_3):

$$\tau = e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta)},$$

aus (18_2):

$$e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}[J_{0x} + (e^{2\pi i\delta} - 1)J_{0x^2}] + ae^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta)}J_{0x^2} = \sigma J_{0x} + a\sigma J_{0x^2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$\sigma = e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} \text{ und } a = -\frac{e^{2\pi i\delta} - 1}{e^{2\pi i(\alpha+\delta)} - 1};$$

aus (18_3):

$$\begin{aligned} J_{01} + (e^{2\pi i\gamma} - 1)J_{0x} \quad &+ e^{2\pi i\gamma}J_{0x^2}(e^{2\pi i(\alpha+\delta)} + 1)(e^{2\pi i\delta} - 1) \\ + be^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}J_{0x} + \quad &bJ_{0x^2}e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}(e^{2\pi i\delta} - 1) \\ + \quad &cJ_{0x^2}e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta)} \\ = \varrho(J_{01} &+ bJ_{0x} + cJ_{0x^2}). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man (vgl. § 2 S. 13):

$$\varrho = 1, \quad b = -\frac{e^{2\pi i\gamma} - 1}{e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} - 1}$$

und:

$$c = \frac{e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}(e^{2\pi i\gamma} - 1)(e^{2\pi i\delta} - 1) - e^{2\pi i\gamma}(e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} - 1)(e^{2\pi i(\alpha+\delta)} + 1)(e^{2\pi i\delta} - 1)}{(e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} - 1)(e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta)} - 1)}.$$

Die Konstanten a, b, c sind bestimmt, sofern die Exponenten $\alpha + \delta$, $\alpha + \gamma + \delta$, $2\alpha + \gamma + 2\delta$ weder null noch ganze Zahlen sind.

Wären unter der Voraussetzung, daß $\alpha + \delta$, $\alpha + \gamma + \delta$, $2\alpha + \gamma + 2\delta$ weder null noch ganze Zahlen sind, y_1, y_2, y_3 linear abhängig, so bestünde die Relation:

$$(19) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0,$$

ferner wäre auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung:

$$(20) \qquad c_1 \varrho y_1 + c_2 \sigma y_2 + c_3 \tau y_3 = 0,$$

folglich auch:

$$(21) \qquad c_1 \varrho^2 y_1 + c_2 \sigma^2 y_2 + c_3 \tau^2 y_3 = 0.$$

Die Gleichungen (19), (20), (21) sind drei homogene lineare Gleichungen

in bezug auf c_1, c_2, c_3, die nicht sämtlich null sein können. Die Gleichungen können daher nur bestehen, wenn die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varrho & \sigma & \tau \\ \varrho^2 & \sigma^2 & \tau^2 \end{vmatrix}$$

den Wert null besitzt; denn die Funktionen y_1, y_2, y_3 können im allgemeinen nur verschwinden, wie aus den Reihenentwicklungen hervorgeht, wenn ein vor den Reihen stehender Faktor, der nur von den Exponenten abhängt, null wird; in diesem Falle kann man sie in einfacher Weise durch nicht verschwindende Integrale ersetzen (vgl. S. 14). Nun ist:

$$(22) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} & e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta)} \\ 1 & e^{2\pi i(2\alpha+2\gamma+2\delta)} & e^{2\pi i\cdot 2(2\alpha+\gamma+2\delta)} \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}\left(e^{2\pi i(\alpha+\delta)}-1\right)\left(e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}-1\right)\left(e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta)}-1\right)$$

von null verschieden, d. h. y_1, y_2, y_3 folglich auch J_{01}, J_{0x}, J_{0x^2} bilden ein Fundamentalsystem. Auf die Diskussion der Ausnahmefälle, wo $\alpha+\delta$, $\alpha+\gamma+\delta$, $2\alpha+\gamma+2\delta$ ganze Zahlen oder null sind, wollen wir nicht eingehen. Es gilt auch hier die Bemerkung von S. 14 bezüglich der Ersatzintegrale.

Das allgemeinere Integral dieses Typus ist das Integral:

$$\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x^m)^{\gamma}(z-x^n)^{\delta}\,dz,$$

wobei m und n positive ganze Zahlen sind, und zwar sei $m<n$, so daß x^n die singuläre Stelle 0 in kleineren Kreisen umläuft als x^m, wenn x diesen Punkt umkreist. x^m macht m, x^n n Umläufe um 0. Die Umlaufrelationen sind:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{10} = {} & J_{1x^m} + e^{2\pi i\gamma}J_{x^m x^n} + e^{2\pi i(\gamma+\delta)}J_{x^n 0} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}J_{0x^m} \\ & + e^{2\pi i(\alpha+2\gamma+\delta)}J_{x^m x^n} + e^{2\pi i(\alpha+2\gamma+2\delta)}J_{x^n 0} + e^{2\pi i(2\alpha+2\gamma+2\delta)}J_{0x^m} + \cdots \\ & + e^{2\pi i\overline{m-1}(\alpha+\gamma+\delta)}J_{0x^m} + e^{2\pi i(\overline{m-1}\alpha+m\gamma+\overline{m-1}\delta)}J_{x^m x^n} \\ & + e^{2\pi i(m-1\alpha+m\gamma+m\delta)}J_{x^n 0} + \cdots + e^{2\pi i(n-1\alpha+m\gamma+n\delta)}J_{x^n 0},\end{aligned}$$

oder geordnet nach den Grundintegralen J_{01}, J_{0x^m}, J_{0x^n}:

$$(23) \qquad \bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma}-1)J_{0x^m}\frac{e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}-1} + (e^{2\pi i\delta}-1)J_{0x^n}$$
$$\cdot\left[e^{2\pi i\gamma}\frac{e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}-1} + e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta)}\frac{e^{2\pi i(n-m)(\alpha+\delta)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\delta)}-1}\right].$$

Ferner ist:

$$J_{1x^m} = J_{1x^m} + e^{2\pi i\gamma} J_{x^m x^n} + e^{2\pi i(\gamma+\delta)} J_{x^n 0} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)} J_{0x^m} + \cdots$$
$$+ e^{2\pi i(\overline{m-1}\alpha + m\gamma + m\delta)} J_{x^n 0} + e^{2\pi i m(\alpha+\gamma+\delta)} J_{0x^n}.$$

Durch Addition von $\bar{J}_{01}$ und $\bar{J}_{1x^m}$ ergibt sich:

$$(24)\quad \bar{J}_{0x^m} = e^{2\pi i m(\alpha+\gamma+\delta)}\left[J_{0x^m} + (e^{2\pi i\delta}-1) J_{0x^n} \frac{e^{2\pi i(n-m)(\alpha+\delta)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\delta)}-1}\right].$$

Für $\bar{J}_{1x^n}$ erhält man:

$$\bar{J}_{1x^n} = J_{1x^m} + e^{2\pi i\gamma} J_{x^m x^n} + \cdots + e^{2\pi i(\overline{n-1}\alpha + m\gamma + n\delta)} J_{x^n 0} + e^{2\pi i(n\alpha + m\gamma + n\delta)} J_{0x^n},$$

so daß also:

$$(25)\quad \bar{J}_{0x^n} = e^{2\pi i(n\alpha + m\gamma + n\delta)} J_{0x^n}.$$

Setzt man $m=1$, $n=2$, so gehen (23), (24), (25) bzw. über in:

$$(13)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma}-1) J_{0x} + e^{2\pi i\gamma} J_{0x^2} (e^{2\pi i\delta}-1)(e^{2\pi i(\alpha+\delta)}+1).$$

$$(14)\quad \bar{J}_{0x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta)}[J_{0x} + (e^{2\pi i\delta}-1) J_{0x^2}].$$

$$(15)\quad \bar{J}_{0x^2} = e^{2\pi i(2\alpha+2\gamma+2\delta)} J_{0x^2}.$$

Setzt man $\delta = 0$, so reduzieren sich die Formeln (23), (24) auf:

$$(11)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma}-1) J_{0x^m} \frac{e^{2\pi i m(\alpha+\gamma)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\gamma)}-1}.$$

$$(12)\quad \bar{J}_{0x^m} = e^{2\pi i m(\alpha+\gamma)} J_{0x^m}.$$

Aus den Gleichungen (13), (14), (15) bzw. (23), (24), (25) ist wiederum ersichtlich, daß sich das Integral J_{0x^2} bzw. J_{0x^n}, das sich von dem umkreisten Punkt 0 bis zur nächsten Verzweigungsstelle erstreckt rein multiplikativ verhält; $\bar{J}_{0x}$ bzw. $\bar{J}_{0x^m}$ setzt sich aus J_{0x} und J_{0x^2} bzw. J_{0x^m} und J_{0x^n}; $\bar{J}_{01}$ aus J_{01}, J_{0x}, J_{0x^2} bzw. J_{01}, J_{0x^m}, J_{0x^n} linear homogen zusammen.

Wir führen nun noch den Faktor $(z-x^3)^{\varepsilon}$ im Integranden ein, wodurch sich die beweglichen Verzweigungspunkte um den Punkt 0 herum noch mehr häufen; das dadurch entstehende Integral ist das im folgenden Paragraphen behandelte.

§ 4. Integrale vom Typus $\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-x^2)^{\sigma}(z-x^3)^{\varepsilon}\,dz$.

Zu den singulären Punkten des im vorigen Paragraphen betrachteten Typus kommen noch die dritten Einheitswurzeln dazu. Wir wollen die Werte der Grundintegrale bestimmen, nachdem x einen positiven

Umlauf um 0 gemacht hat; x^2 umkreist dabei diesen Punkt zweimal, x^3 dreimal in demselben Sinn. Den durch diese Umläufe entstehenden deformierten Integrationsweg veranschaulicht diese Figur:

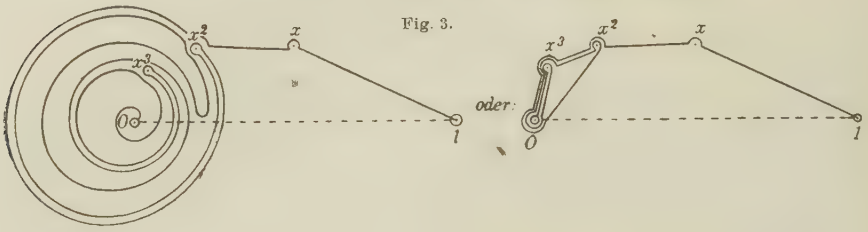


Fig. 3.

Es ist:

$$\bar{J}_{10} = J_{1x} + e^{2\pi i\gamma} J_{x x^2} + e^{2\pi i(\gamma+\delta)} J_{x^2 x^3} + e^{2\pi i(\gamma+\delta+\varepsilon)} J_{x^3 0} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)} J_{0 x^3}$$
$$+ e^{2\pi i(\alpha+\gamma+2\delta+\varepsilon)} J_{x^2 x^3} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+2\delta+2\varepsilon)} J_{x^3 0}$$
$$+ e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta+2\varepsilon)} J_{0 x^3} + e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta+3\varepsilon)} J_{x^3 0},$$

oder:

$$(26)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma} - 1) J_{0x} + e^{2\pi i\gamma} J_{0 x^2} (e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)} + 1)(e^{2\pi i\delta} - 1)$$
$$+ e^{2\pi i(\gamma+\delta)} J_{0 x^3} (e^{2\pi i\varepsilon} - 1)(e^{2\pi i(2\alpha+\delta+2\varepsilon)} + e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)} + 1).$$

Ferner ist:

$$\bar{J}_{1x} = J_{1x} + e^{2\pi i\gamma} J_{x x^2} + e^{2\pi i(\gamma+\delta)} J_{x^2 x^3} + e^{2\pi i(\gamma+\delta+\varepsilon)} J_{x^3 0} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)} J_{0x},$$

folglich ist:

$$(27)\quad \bar{J}_{0x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)} [J_{0x} + (e^{2\pi i\delta} - 1) J_{0 x^2} + e^{2\pi i\delta} J_{0 x^3} (e^{2\pi i(\alpha+\varepsilon)} + 1)(e^{2\pi i\varepsilon} - 1)].$$

$$J_{1 x^2} = J_{1x} + e^{2\pi i\gamma} J_{x x^2} + \cdots + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+2\delta+2\varepsilon)} J_{x^3 0} + e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta+2\varepsilon)} J_{0 x^2},$$

folglich ist:

$$(28)\qquad \bar{J}_{0 x^2} = e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta+2\varepsilon)} [J_{0 x^2} + (e^{2\pi i\varepsilon} - 1) J_{0 x^3}],$$

und schließlich:

$$(29)\qquad \bar{J}_{0 x^3} = e^{2\pi i(3\alpha+\gamma+2\delta+3\varepsilon)} J_{0 x^3}.$$

Setzt man $\varepsilon = 0$, so gehen die Gleichungen (26), (27), (28) bzw. über in (13), (14), (15) des vorigen Paragraphen.

Wir wollen nun die Umlaufrelationen des allgemeinen Integrals ableiten:

$$\int z^\alpha (z-1)^\beta (z-x^m)^\gamma (z-x^n)^\delta (z-x^p)^\varepsilon dz,$$

wobei m, n, p positive ganze Zahlen sind, und zwar sei $m<n<p$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{10} &= J_{1x^m} + e^{2\pi i\gamma} J_{x^m x^n} + e^{2\pi i(\gamma+\delta)} J_{x^n x^p} + e^{2\pi i(\gamma+\delta+\varepsilon)} J_{x^p 0}\\ &+ e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)} J_{0x^m} + e^{2\pi i(\alpha+2\gamma+\delta+\varepsilon)} J_{x^m x^n} + e^{2\pi i(\alpha+2\gamma+2\delta+\varepsilon)} J_{x^n x^p}\\ &+ e^{2\pi i(\alpha+2\gamma+2\delta+2\varepsilon)} J_{x^p 0} + \cdots + e^{2\pi i\overline{(m-1}\alpha+m\gamma+m\delta+m\varepsilon)} J_{x^p 0}\\ &+ e^{2\pi i m(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}\left[J_{0x^n} + e^{2\pi i\delta} J_{x^n x^p} + e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)} J_{x^p 0} + e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)} J_{0x^n}\right.\\ &\left. + \cdots + e^{2\pi i\overline{(n-m-1}\alpha+\overline{n-m}(\delta+\varepsilon))} J_{x^p 0}\right] + e^{2\pi i(m(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)+\overline{n-m}(\alpha+\delta+\varepsilon))}\\ &\quad\left[J_{0x^p} + e^{2\pi i\varepsilon} J_{x^p 0} + e^{2\pi i(\alpha+\varepsilon)} J_{0x^p} + \cdots + e^{2\pi i\overline{(p-n-1}\alpha+\overline{p-n}\varepsilon)} J_{x^p 0}\right]\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(30)\quad \bar{J}_{01} &= J_{01} + (e^{2\pi i\gamma}-1) J_{0x^m}\frac{e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}-1} + (e^{2\pi i\delta}-1) J_{0x^n}\\ &\left[e^{2\pi i\gamma}\frac{e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}-1} + e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}\frac{e^{2\pi i(n-m)(\alpha+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)}-1}\right]\\ &+ (e^{2\pi i\varepsilon}-1) J_{0x^p}\left[e^{2\pi i(\gamma+\delta)}\frac{e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}-1} + e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}\right.\\ &\left. e^{2\pi i\delta}\cdot\frac{e^{2\pi i(n-m)(\alpha+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)}-1} + e^{2\pi i(n\alpha+m\gamma+n\delta+n\varepsilon)}\frac{e^{2\pi i(p-n)(\alpha+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\varepsilon)}-1}\right].\end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{1x^m} &= J_{1x^m} + e^{2\pi i\gamma} J_{x^m x^n} + e^{2\pi i(\gamma+\delta)} J_{x^n x^p} + \cdots + e^{2\pi i\overline{(m-1}\alpha+m(\gamma+\delta+\varepsilon))} J_{x^p 0}\\ &+ e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)} J_{0x^m}.\end{aligned}$$

Daher ist:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{0x^m} &= e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}\left\{J_{0x^m} + J_{0x^n}\left[-1 + e^{2\pi i\delta} - e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)} \pm \cdots\right.\right.\\ &\left.\left. + e^{2\pi i\overline{(n-m-1}\alpha+\overline{n-m}\delta+\overline{n-m-1}\varepsilon)}\right]\right.\\ &+ J_{0x^p}\left[e^{2\pi i\delta}\left(-1+e^{2\pi i\varepsilon} - e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)} \pm \cdots + e^{2\pi i\overline{(n-m-1}\alpha+\overline{n-m}(\delta+\varepsilon))}\right)\right.\\ &\left.\left. + e^{2\pi i\overline{n-m}(\alpha+\delta+\varepsilon)}\left(-1+e^{2\pi i\varepsilon}+e^{2\pi i(\alpha+\varepsilon)} \pm \cdots + e^{2\pi i\overline{(p-n-1}\alpha+\overline{p-n}\varepsilon)}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(31)\quad \bar{J}_{0x^m} &= e^{2\pi im(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}\left\{J_{0x^m} + (e^{2\pi i\delta}-1) J_{0x^n}\frac{e^{2\pi in\overline{-m}(\alpha+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)}-1}\right.\\ &\left. + J_{0x^p}\left[e^{2\pi i\delta}\frac{e^{2\pi i(n-m)(\alpha+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)}-1} + e^{2\pi i\overline{n-m}(\alpha+\delta+\varepsilon)}\frac{e^{2\pi i(p-n)(\alpha+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\alpha+\varepsilon)}-1}\right]\right\}\end{aligned}$$

und:

$$\bar{J}_{1x^n} = J_{1x^n} + e^{2\pi i\gamma} J_{x^n x^m} + \cdots + e^{2\pi i(m(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)+\overline{n-m}(\alpha+\delta+\varepsilon))} J_{0x^n},$$

folglich:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{0x^n} &= e^{2\pi i(m(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)+\overline{n-m}(\alpha+\delta+\varepsilon))}\left\{J_{0x^n} + J_{0x^p}\left[-1 + e^{2\pi i\varepsilon} - e^{2\pi i(\alpha+\varepsilon)}\right.\right.\\ &\left.\left. \pm \cdots + e^{2\pi i(\overline{p-n-1}\alpha+\overline{p-n}\varepsilon)}\right]\right\}\end{aligned}$$

oder:

$$(32)\quad \bar{J}_{0x^n} = e^{2\pi i(n\alpha + m\gamma + n(\delta+\varepsilon))}\left[J_{0x^n} + (e^{2\pi i\varepsilon} - 1)J_{0x^p}\frac{e^{2\pi i\overline{p-n}(\alpha+\varepsilon)} - 1}{e^{2\pi i(\alpha+\varepsilon)} - 1}\right].$$

Schließlich ist:

$$(33)\quad \bar{J}_{0x^p} = e^{2\pi i(p\alpha + m\gamma + n\delta + p\varepsilon)}J_{0x^p}.$$

Setzt man in $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$, so gehen (30), (31), (32), (33) bzw. über in:

$$(26)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma} - 1)J_{0x} + (e^{2\pi i\delta} - 1)J_{0x^2}[e^{2\pi i\gamma} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}] + (e^{2\pi i\delta} - 1)J_{0x^3}[e^{2\pi i(\gamma+\delta)}(1 + e^{2\pi i(\alpha+\delta+\varepsilon)} + e^{2\pi i(2\alpha+\delta+2\varepsilon)})],$$

$$(27)\quad \bar{J}_{0x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)}[J_{0x} + (e^{2\pi i\delta} - 1)J_{0x^2} + e^{2\pi i\delta}J_{0x^3}(e^{2\pi i\delta} - 1)(e^{2\pi i(\alpha+\delta)} + 1)],$$

$$(28)\quad \bar{J}_{0x^2} = e^{2\pi i(2\alpha+\gamma+2\delta+2\varepsilon)}[J_{0x^2} + (e^{2\pi i\varepsilon} - 1)J_{0x^3}],$$

$$(29)\quad \bar{J}_{0x^3} = e^{2\pi i(3\alpha+\gamma+2\delta+3\varepsilon)}J_{0x^3}.$$

Für $\varepsilon = 0$ erhält man die Formeln (23), (24) und (25). Auch hier ergibt sich aus den Gleichungen (26), (27), (28) und (29), daß sich das Integral J_{0x^3} beim Umlauf von x um 0 mit einer Konstanten multipliziert, während die übrigen Integrale J_{0x^2}, J_{0x} und J_{01} sich homogen linear aus J_{0x^3}, J_{0x^2}, J_{0x} und J_{01} zusammensetzen, und zwar $\bar{J}_{0x^2}$ aus $\bar{J}_{0x^3}$ und J_{0x^2}, $\bar{J}_{0x}$ aus J_{0x^3}, J_{0x^2} und J_{0x}, endlich $\bar{J}_{01}$ aus J_{0x^3}, J_{0x^2}, J_{0x} und J_{01}. Analoges gilt für $\bar{J}_{0x^p}$, $\bar{J}_{0x^n}$, $\bar{J}_{0x^m}$ und $\bar{J}_{01}$, wie aus den Gleichungen (30), (31), (32) und (33) zu ersehen ist.

Wir gehen nun dazu über, die Umlaufrelationen desjenigen Integrals zu berechnen, das den allgemeinen Charakter der bisher behandelten speziellen Integrale aufweist, d. h. bei welchem beliebig viele Punkte z_ν um 0 herum zusammenrücken und den singulären Punkt 0 umkreisen. Das Integral muß unter Berücksichtigung unserer in der Einleitung S. 5 gemachten Betrachtungen die folgende Form haben.

§ 5. Das Integral $\int z^\alpha (z-1)^\beta (z - x^{h_1})^{\varrho_1}(z - x^{h_2})^{\varrho_2}\dots(z - x^{h_n})^{\varrho_n}dz$.

$h_1, h_2, \dots, h_n$ bedeuten positive ganze Zahlen, und zwar sei vorausgesetzt:

$$h_n > h_{n-1} > \cdots > h_2 > h_1.$$

Wir lassen x wiederum einen positiven Umlauf um 0 machen, dann umkreisen die Punkte x^{h_ν} den Punkt 0 h_ν-mal im positiven Sinn. Es tritt so das allgemeine Verhalten auf, das ein Integral um 0 herum beim Umlauf von x um 0 aufweisen kann, d. h. durch den h_ν-maligen Umlauf der Punkte x^{h_ν} $[\nu = 1, 2, \dots, n]$ um 0 wird die stärkste Störung in der Umgebung dieses Punktes erreicht.

Es ist:

4) $$\bar{J}_{10} = J_{1x^{h_1}} + e^{2\pi i \varrho_1} J_{x^{h_1}x^{h_2}} + e^{2\pi i(\varrho_1+\varrho_2)} J_{x^{h_2}x^{h_3}} + \cdots + e^{2\pi i \sum_1^n \nu \varrho_\nu} J_{x^{h_n}0}$$

$$e^{2\pi i\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{0\,x^{h_1}} + e^{2\pi i\left(\alpha+\varrho_1+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{x^{h_1}x^{h_2}} + \cdots + e^{2\pi i\left(\alpha+2\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{x^{h_n}0}$$

$$e^{2\pi i\left(2\alpha+2\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{0x^{h_1}} + \cdots\cdots\cdots + e^{2\pi i\left(\overline{h_1-1}\,\alpha+h_1\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{x^{h_n}0}$$

$$e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)\right)} J_{0\,x^{h_2}} + e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\varrho_2\right)} J_{x^{h_2}x^{h_3}} + \cdots + e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{x^{h_n}0}$$

$$e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\sum_2^n \nu \varrho_\nu+\alpha\right)} J_{0x^{h_2}} + \cdots\cdots\cdots + e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\overline{h_2-h_1}\sum_2^n \nu \varrho_\nu+\overline{h_2-h_1-1}\,\alpha\right)} J_{x^{h_n}0}$$

$$e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\overline{h_2-h_1}\left(\alpha+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)\right)} J_{0x^{h_3}} + \cdots\cdots\cdots$$

$$e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\overline{h_2-h_1}\left(\alpha+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)+\cdots+\overline{h_{n-1}-h_{n-2}}\left(\alpha+\sum_{n-1}^n \nu \varrho_\nu\right)\right)} J_{0x^{h_n}} + \cdots$$

$$e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\overline{h_2-h_1}\left(\alpha+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)+\cdots+h_n-h_{n-1}-1\left(\alpha+\sum_n^n \nu \varrho_\nu\right)\right)} J_{0x^{h_n}}$$

$$e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\overline{h_2-h_1}\left(\alpha+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)+\cdots+\overline{h_n-h_{n-1}}\sum_n^n \nu \varrho_\nu+\overline{h_n-h_{n-1}-1}\,\alpha\right)} J_{x^{h_n}0}$$

oder:

$$\bar{J}_{10} = J_{10} + J_{0x^{h_1}}\left[1 - e^{2\pi i \varrho_1} + e^{2\pi i\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} \mp \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{h_1-1}\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\varrho_1\right)}\right]$$

$$+ J_{0x^{h_2}}\left[e^{2\pi i \varrho_1}\left(1 - e^{2\pi i \varrho_2} + e^{2\pi i\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} \mp \cdots - e^{2\pi i\left(h_1-1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\varrho_2\right)}\right)\right.$$

$$\left. + e^{2\pi i h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)}\left(1 - e^{2\pi i \varrho_2} + e^{2\pi i\left(\alpha+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)} \mp \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{h_2-h_1-1}\left(\alpha+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)+\varrho_2\right)}\right)\right]$$

$$+ J_{0x^{h_3}}\left[e^{2\pi i(\varrho_1+\varrho_2)}(1 \pm \cdots) + \cdots\right] \text{ usw.}$$

oder:

$$\bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i \varrho_1} - 1) J_0 x^{h_1} \frac{e^{2\pi i h_1 \left(\alpha + \sum_1^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i \left(\alpha + \sum_1^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1}$$

$$+ (e^{2\pi i \varrho_2} - 1) J_0 x^{h_2} \left[e^{2\pi i \varrho_1} \frac{e^{2\pi i h_1 \left(\alpha + \sum_1^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i \left(\alpha + \sum_1^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1} + e^{2\pi i h_1 \left(\alpha + \sum_2^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} \frac{e^{2\pi i (h_2 - h_1) \left(\alpha + \sum_2^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i \left(\alpha + \sum_2^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1} \right.$$

$$+ \cdots + (e^{2\pi i \varrho_n} - 1) J_0 x^{h_n} \left[e^{2\pi i \sum_1^{n-1}{}^{\nu} \varrho_\nu} \frac{e^{2\pi i h_1 \left(\alpha + \sum_1^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i \left(\alpha + \sum_1^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1} \right.$$

$$+ e^{2\pi i \left(h_1 \left(\alpha + \sum_1^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right) + \sum_2^{n-1}{}^{\nu} \varrho_\nu \right)} \frac{e^{2\pi i (h_2 - h_1) \left(\alpha + \sum_2^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i \left(\alpha + \sum_2^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1}$$

$$+ e^{2\pi i \left(h_1 \left(\alpha + \sum_1^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right) + \overline{h_2 - h_1} \left(\alpha + \sum_2^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right) \right)} \frac{e^{2\pi i (h_3 - h_2) \left(\alpha + \sum_3^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i \left(\alpha + \sum_3^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1} + \cdots$$

$$\left. + e^{2\pi i \left(h_1 \left(\alpha + \sum_1^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right) + \cdots + (h_{n-1} - h_{n-2}) \left(\alpha + \sum_{n-1}^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right) \right)} \frac{e^{2\pi i (h_n - h_{n-1}) \left(\alpha + \sum_n^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i \left(\alpha + \sum_n^n{}^{\nu} \varrho_\nu\right)} - 1} \right]$$

oder:

$$(35) \quad \bar{J}_{01} = J_{01} + \sum_1^n{}^{\omega} \sum_1^{\omega}{}^{\tau} (e^{2\pi i \varrho_\omega} - 1) J_0 x^{h_\omega}$$

$$\cdot e^{2\pi i \left[\sum_\tau^{\omega-1}{}^{\tau} \varrho_\tau + \sum_1^{\tau-1}{}^{\lambda} (h_\lambda - h_{\lambda-1}) \left(\alpha + \sum_\lambda^n \varrho_\lambda\right) \right]} \frac{e^{2\pi i (h_\tau - h_{\tau-1}) \left(\alpha + \sum_\tau^n{}^{\tau} \varrho_\tau\right)} - 1}{e^{2\pi i \left(\alpha + \sum_\tau^n{}^{\tau} \varrho_\tau\right)} - 1}.$$

Ferner ist:

$$\bar{J}_{1x^{h_\nu}} = J_{1x^{h_1}} + e^{2\pi i\varrho_1} J_{x^{h_1}x^{h_2}} + e^{2\pi i(\varrho_1+\varrho_2)} J_{x^{h_2}x^{h_3}} + \cdots +$$
$$+ e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n{}^{\nu}\varrho_\nu\right)+\cdots+\overline{h_\nu-h_{\nu-1}}\sum_n^n{}^{\nu}\varrho_\nu+\overline{h_\nu-h_{\nu-1}-1}\,\alpha\right)} J_{x^{h_\nu}0}$$
$$+ e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^n{}^{\nu}\varrho_\nu\right)+\cdots+\overline{h_\nu-h_{\nu-1}}\left(\alpha+\sum_\nu^n{}^{\nu}\varrho_\nu\right)\right)} J_{0x^{h_\nu}}$$

Somit ergibt sich:

$$(36)\quad \bar{J}_{0x^{h_\nu}} = e^{2\pi i\left(h_\nu\alpha+\sum_1^\nu{}^{\omega}h_\omega\varrho_\omega\right)}\left\{ J_{0x^{h_\nu}} + \sum_{\nu+1}^{n}{}^{\omega}\sum_{\nu+1}^{\omega}{}^{\tau}(e^{2\pi i\varrho_\omega}-1)J_{0x^{h_\omega}}\right.$$
$$\left. \cdot\, e^{2\pi i\left[\sum_{\nu+1}^{\omega-1}{}^{\tau}\varrho_\tau+\sum_{\nu+1}^{\tau-1}{}^{\lambda}(h_\lambda-h_{\lambda-1})\left(\alpha+\sum_1^n{}^{\lambda}\varrho_\lambda\right)\right]} \frac{e^{2\pi i(h_\tau-h_{\tau-1})\left(\alpha+\sum_\tau^n{}^{\tau}\varrho_\tau\right)}-1}{e^{2\pi i\left(\alpha+\sum_\tau^n{}^{\tau}\varrho_\tau\right)}-1} \right\}^{1)}.$$

Anmerkung: Statt der einfachen Potenzen x^ν in den allgemeineren Integralen der §§ 2—4 sowie im allgemeinen Typus in § 5 kann man (zur Verallgemeinerung) auch $r^{(\nu)}(x)$ einführen, wobei $r^{(\nu)}(x)$ ganze rationale Funktionen sind, die für $x=0$ von der ν^{ten} Ordnung verschwinden. Die Umlaufrelationen werden dadurch nicht geändert; das gilt auch noch, wenn die Ordnungen zweier ganzer rationaler Funktionen einander gleich werden. Dabei ist zu beachten, daß derjenige Punkt der umkreisten Stelle 0 am nächsten liegt, der durch die Funktion dargestellt ist, deren absoluter Betrag der kleinere ist. Werden auch die absoluten Beträge der beiden Funktionen einander gleich, so machen die beiden Punkte ihre Umläufe nacheinander, stören sich also beim Umlauf gegenseitig nicht. Analoges gilt von den in den folgenden §§ 6—7 behandelten Integralen, in welchen Faktoren von der Form $z-(x^\lambda+1)$ auftreten. Auch hier könnte man $x^\lambda+1$ durch $u_\lambda = r^{(\lambda)}(x)+1$ ersetzen, wobei $r^{(\lambda)}(x)$ für $x=0$ von der λ^{ten} Ordnung verschwindet.

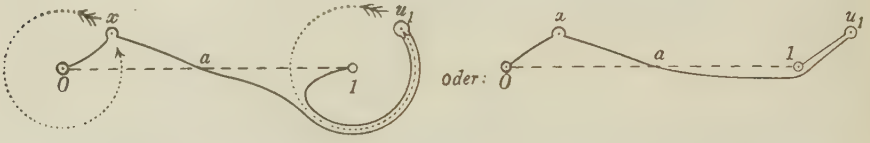
1) Eine ausführlichere Ableitung dieser Gleichung sowie die Schlüsse, welche wir daraus ziehen können, folgen im dritten Kapitel, S. 36 ff.

§ 6. Integrale vom Typus $\int z^\alpha (z-1)^\beta (z-x)^\gamma (z-(x+1))^\sigma dz$, $\int z^\alpha (z-1)^\beta (z-x)^\gamma (z-(x+1))^\sigma z-(x^2+1))^\varepsilon dz$ und $\int z^\alpha (z-1)^\beta (z-x)^\gamma (z-(x+1))^\sigma (z-(x^2+1))^\sigma (z-(x^3+1))^\varepsilon dz$.

a) Das Integral $\int z^\alpha (z-1)^\beta (z-x)^\gamma (z-(x+1))^\sigma dz$.

Bei den bisher betrachteten Integralen bewegten sich die Funktionen z_ν (vgl. Einleitung S. 3) um die singuläre Stelle 0, wenn x einen Umlauf um 0 machte. Nun können sich aber gleichzeitig (zwangläufig) andere Punkte u_λ um eine zweite singuläre Stelle herumbewegen. Das einfachste Beispiel dieser Art ist das obige erste Integral, bei welchem der Punkt $u_1 = x+1$ im positiven Sinn um die singuläre Stelle 1 herumläuft, wenn x einen positiven Umlauf um den singulären Punkt 0 macht.

Fig. 4.



Diese Figur veranschaulicht den nach dem Umlauf entstandenen deformierten Weg $0-1$.

Um die Werte der Integrale $\bar{J}_{01}$, $\bar{J}_{0x}$ und $\bar{J}_{0u_1}$ zu gewinnen, berechnen wir die Integrale nach dem Umlauf, die von dem regulären Punkt a ausgehen und sich nach den Verzweigungspunkten 0, 1, x, u_1 erstrecken, und erhalten sodann durch Kombination die gesuchten Integralwerte. Es ist:

(37′)
$$\bar{J}_{a0} = J_{ax} + e^{2\pi i\gamma} J_{x0},$$
$$\bar{J}_{a1} = J_{au_1} + e^{2\pi i\delta} J_{u_1 1},$$

folglich ist:

$$\bar{J}_{01} = J_{xu_1} + e^{2\pi i\gamma} J_{0x} + e^{2\pi i\delta} J_{u_1 1}$$

oder:

(37)
$$\bar{J}_{01} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma} - 1) J_{0x} + (1 - e^{2\pi i\delta}) J_{1u_1}.$$

Wir wollen hier und in den folgenden Formeln um der Symmetrie der abzuleitenden Formeln willen auch die Integrale J_{1u_λ} einführen. Man kann ja stets durch Zerlegung von J_{1u_λ} in J_{10} und J_{0u_λ} Relationen bekommen, in welchen nur Integrale vorkommen, die von 0 ausgehen.

Es ist ferner:

$$\bar{J}_{ax} = J_{ax} + e^{2\pi i\gamma} J_{x0} + e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} J_{0x},$$
$$\bar{J}_{au_1} = J_{au_1} + e^{2\pi i\delta} J_{u_1 1} + e^{2\pi i(\beta+\delta)} J_{1u_1}$$

daher ist:

$$\bar{J}_{0x} = e^{2\pi i(\alpha+\gamma)} J_{0x}, \tag{38}$$

und:

$$\bar{J}_{0u_1} = J_{01} + (e^{2\pi i\gamma} - 1) J_{0x} + J_{1u_1}(1 - e^{2\pi i\delta} + e^{2\pi i(\beta+\delta)}). \tag{39}$$

Betrachten wir nun das Integral:

$$\int z^\alpha (z-1)^\beta (z-x)^\gamma (z-(x^m+1))^\delta dz,$$

— m ist eine positive ganze Zahl — so macht $u_1 = x^m + 1$ beim Umlauf von x um 0 m Umläufe um 1. Die Formel (38) gilt auch hier. Für $\bar{J}_{a1}$ erhält man:

$$\bar{J}_{a1} = J_{au_1} + e^{2\pi i\delta} J_{u_1 1} + e^{2\pi i(\beta+\delta)} J_{1u_1} + e^{2\pi i(\beta+2\delta)} J_{u_1 1} + \cdots + e^{2\pi i(\overline{m-1}\beta + m\delta)} J_{u_1 1}$$

und:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{au_1} &= J_{au_1} + e^{2\pi i\delta} J_{u_1 1} + e^{2\pi i(\beta+\delta)} J_{1u_1} + e^{2\pi i(\beta+2\delta)} J_{u_1 1} + \cdots + e^{2\pi im(\beta+\delta)} J_{1u_1} \\ &= J_{a1} + J_{1u_1}[(1 - e^{2\pi i\delta} + e^{2\pi i(\beta+\delta)} - e^{2\pi i(\beta+2\delta)} \pm \cdots \\ &\qquad - e^{2\pi i(\overline{m-1}\beta + m\delta)}) + e^{2\pi im(\beta+\delta)}] \\ &= J_{a1} + J_{1u_1}\left[(1 - e^{2\pi i\delta}) \frac{e^{2\pi im(\beta+\delta)} - 1}{e^{2\pi i(\beta+\delta)} - 1} + e^{2\pi im(\beta+\delta)}\right],\end{aligned}$$

ferner ist:

$$\bar{J}_{a1} = J_{a1} + J_{1u_1}(1 - e^{2\pi i\delta}) \frac{e^{2\pi im(\beta+\delta)} - 1}{e^{2\pi i(\beta+\delta)} - 1}.$$

(37′) gilt auch hier, daher ist:

$$\bar{J}_{01} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1u_1}(1 - e^{2\pi i\delta}) \frac{e^{2\pi im(\beta+\delta)} - 1}{e^{2\pi i(\beta+\delta)} - 1}, \tag{40}$$

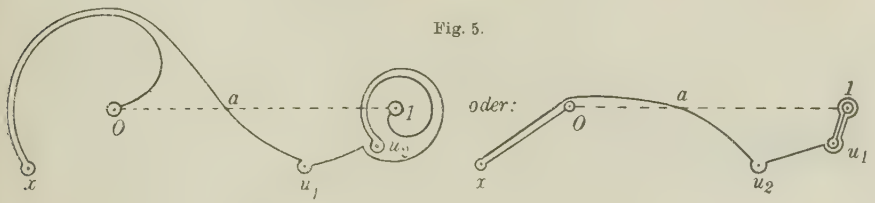
$$\bar{J}_{0u_1} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1u_1}\left[e^{2\pi im(\beta+\delta)} + (1 - e^{2\pi i\delta}) \frac{e^{2\pi im(\beta+\delta)} - 1}{e^{2\pi i(\beta+\delta)} - 1}\right]. \tag{41}$$

Für $m = 1$ gehen (40) und (41) bzw. über in (37) und (39).

b) **Das Integral** $\int z^\alpha (z-1)^\beta (z-x)^\gamma (z-((x+1))^\sigma (z-(x^2+1))^\varepsilon dz$.

Die Funktion $u_2 = x^2 + 1$ macht zwei positive Umläufe um 1, wenn x den Punkt 0 im positiven Sinn umkreist. Der deformierte Integrationsweg sieht dann so aus:

Fig. 5.



Die Gleichungen (37′) und (38) gelten auch in diesem Fall.

$$\bar{J}_{a\,u_1} = J_{a\,u_1} + e^{2\pi i\delta} J_{u_1 u_2} + e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)} J_{u_2 1} + e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon)} J_{1\,u_1}$$

ferner:

$$\bar{J}_{a1} = J_{a\,u_1} + e^{\pi i\delta} J_{u_1 u_2} + e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)} J_{u_2 1} + e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon)} J_{1\,u_2} + e^{2\pi i(\beta+\delta+2\varepsilon)} J_{u_2 1}$$

und:

$$\bar{J}_{a\,u_2} = J_{a\,u_1} + e^{2\pi i\delta} J_{u_1 u_2} + e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)} J_{u_2 1} + e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon)} J_{1\,u_2} + e^{2\pi i(\beta+\delta+2\varepsilon)} J_{u_2 1} + e^{2\pi i(2\beta+\delta+2\varepsilon)} J_{1\,u_2},$$

folglich:

$$(42)\quad \bar{J}_{0\,u_1} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1\,u_1}(1 - e^{2\pi i\delta} + e^{2\pi i(\gamma+\delta+\varepsilon)}) + e^{2\pi i\delta} J_{1\,u_2}(1 - e^{2\pi i\varepsilon}).$$

ferner:

$$(43)\quad \bar{J}_{0\,u_2} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1\,u_1}(1 - e^{2\pi i\delta}) + J_{1\,u_2}[e^{2\pi i\delta}(1 + e^{2\pi i(\beta+\varepsilon)})(1 - e^{\pi i\varepsilon}) + e^{2\pi i(2\beta+\delta+2\varepsilon)}]$$

und:

$$(44)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1\,u_1}(1 - e^{2\pi i\delta}) + e^{2\pi i\delta} J_{1\,u_2}(1 + e^{2\pi i(\beta+\varepsilon)})(1 - e^{2\pi i\varepsilon}).$$

Für $\varepsilon = 0$ gehen die Gleichungen (42) und (44) bzw. über in:

$$(39)\quad \bar{J}_{0\,u_1} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1\,u_1}(1 - e^{2\pi i\delta} + e^{2\pi i(\beta+\delta)})$$

und:

$$(37)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1\,u_1}(1 - e^{2\pi i\delta}).$$

Wir wollen nun die Umlaufrelationen des allgemeineren Integrals dieses Typus berechnen:

$$\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-(x^m+1))^{\delta}(z-(x^n+1))^{\varepsilon}\,dz,$$

wobei m und n ganze positive Zahlen sind, und zwar sei $n > m$, so daß $u_2 = x^n + 1$ der Eins näher liegt als $u_1 = x^m + 1$.

Es ist dann:

$$\bar{J}_{a\,u_1} = J_{a\,u_1} + e^{2\pi i\delta} J_{u_1 u_2} + e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)} J_{u_2 1} + e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon)} J_{1\,u_1} + \cdots + e^{\pi i m(\gamma+\delta+\varepsilon)} J_{1\,u_1}$$

oder:

$$\bar{J}_{a\,u_1} = J_{a1} + J_{1\,u_1}\left[(1 - e^{2\pi i\delta})\frac{e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon)} - 1}{e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon)} - 1}\right] + (1 - e^{2\pi i\varepsilon}) J_{1\,u_2}\left[e^{2\pi i\delta}\frac{e^{2\pi i m(\gamma+\delta+\varepsilon)} - 1}{e^{2\pi i(\gamma+\delta+\varepsilon)} - 1} + e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon)}\frac{e^{2\pi i(n-m)(\gamma+\varepsilon)} - 1}{e^{2\pi i(\gamma+\varepsilon)} - 1}\right],$$

analog Formel (23) in § 3.

Endlich ist:

$$\bar{J}_{a\,u_2} = \bar{J}_{a1} + e^{2\pi i(n\beta+m\delta+n\varepsilon)} J_{1\,u_2}.$$

Es ist demnach:

$$(45)\quad \bar{J}_{0u_1}=J_{01}+J_{0x}(e^{2\pi i\gamma}-1)+J_{1u_1}\left[(1-e^{2\pi i\delta})\frac{e^{2\pi im(\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}+e^{2\pi im(\gamma+\delta+\varepsilon)}\right]$$
$$+(1-e^{2\pi i\varepsilon})J_{1u_2}\cdot e^{2\pi i\delta}\frac{e^{2\pi im(\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}.$$

$$(46)\quad \bar{J}_{01}=J_{01}+J_{0x}(e^{2\pi i\gamma}-1)+J_{1u_1}(1-e^{2\pi i\delta})\frac{e^{2\pi im(\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}+$$
$$(1-e^{2\pi i\varepsilon})J_{1u_2}\left[e^{2\pi i\delta}\frac{e^{2\pi im(\beta+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon)}-1}+e^{2\pi im(\beta+\delta+\varepsilon)}\frac{e^{2\pi i(n-m)(\beta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\varepsilon)}-1}\right].$$
$$\bar{J}_{0u_2}=\bar{J}_{01}+e^{2\pi i(n\beta+m\delta+n\varepsilon)}J_{1u_2}.$$

$$(47)\quad \bar{J}_{0u_2}=J_{01}+(e^{2\pi i\gamma}-1)J_{0x}+J_{1u_1}(1-e^{2\pi i\delta})\frac{e^{2\pi im(\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon)}-1}$$
$$+(1-e^{2\pi i\varepsilon})J_{1u_2}\left[e^{2\pi i\delta}\frac{e^{2\pi im(\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\gamma+\delta+\varepsilon)}-1}+e^{2\pi im(\gamma+\delta+\varepsilon)}\frac{e^{2\pi i(n-m)(\beta+\varepsilon)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\varepsilon)}-1}+e^{2\pi i(n\beta+m\delta+n\varepsilon)}\right].$$

Für $m=1$, $n=2$ gehen (45), (46), (44) bzw. über in (42), (44), (43). Für $\varepsilon=0$ erhält man aus (45) und (46) bzw. (41) und (40). [Wir verallgemeinern nur die Funktionen u_λ, die sich um den Punkt 1 herumbewegen, da die Verallgemeinerung der Funktionen z_ν, welche den Punkt 0 umkreisen, für $\bar{J}_{0z_\nu}$ die bereits in den §§ 2—5 abgeleiteten Formeln liefern würden und die $\bar{J}_{0u_\lambda}$ sich leicht durch Kombination ergäben. (Vgl. § 8 S. 40)].

c) Das Integral

$$\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-(x+1))^{\sigma}(z-(x^2+1))^{\varepsilon}(z-(x^3+1))^{\zeta}dz.$$

x möge wiederum einen positiven Umlauf um den singulären Punkt 0 machen, dann macht $u_1=x+1$ einen Umlauf, $u_2=x^2+1$ zwei und $u_3=x^3+1$ drei Umläufe um 1 im positiven Sinn. Der deformierte Weg wird durch die Figur 6 (s. Seite 30) veranschaulicht.

Somit ist:

$$\bar{J}_{au_1}=J_{au_1}+e^{2\pi i\delta}J_{u_1u_2}+e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)}J_{u_2u_3}+e^{2\pi i(\delta+\varepsilon+\zeta)}J_{u_31}+e^{2\pi i(\delta+\varepsilon+\zeta+\beta)}J_{1u_1},$$

ferner ist:

$$\bar{J}_{au_2}=J_{au_1}+e^{2\pi i\delta}J_{u_1u_2}+\cdots+e^{2\pi i(\delta+\varepsilon+\zeta)}J_{u_31}+e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}J_{1u_2}+\cdots+e^{2\pi i(2\beta+\delta+2\varepsilon+2\zeta)}J_{1u_2},$$
$$\bar{J}_{a1}=J_{au_1}+e^{2\pi i\delta}J_{u_1u_2}+\cdots+e^{2\pi i(2\beta+\delta+2\varepsilon+2\zeta)}J_{1u_3}+e^{2\pi i(2\beta+\delta+2\varepsilon+3\zeta)}J_{u_31}$$

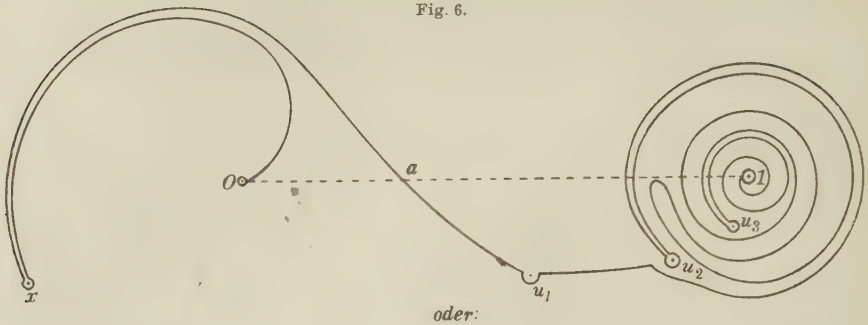
und:

$$\bar{J}_{au_3}=J_{au_1}+e^{2\pi i\delta}J_{u_1u_2}+e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)}J_{u_2u_3}+\cdots+e^{2\pi i(3\beta+\delta+2\varepsilon+3\zeta)}J_{1u_3}.$$

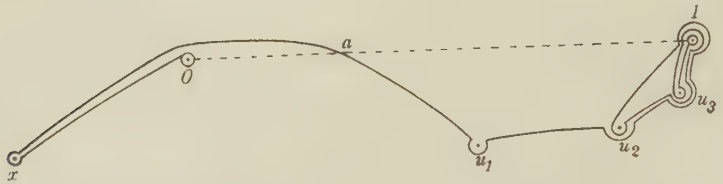
$\bar{J}_{a0}$ hat denselben Wert wie in § 6a; es ist daher:

$$(48)\quad \bar{J}_{0u_1}=J_{01}+J_{0x}(e^{2\pi i\gamma}-1)+J_{1u_1}[(1-e^{2\pi i\delta})+e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}]$$
$$+e^{2\pi i\delta}J_{1u_2}(1-e^{2\pi i\varepsilon})+e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)}J_{1u_3}(1-e^{2\pi i\zeta}).$$

Fig. 6.



oder:



$$(49)\quad \bar{J}_{0u_2} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1u_1}(1 - e^{2\pi i\delta}) + e^{2\pi i\delta}J_{1u_2}[(1-e^{2\pi i\varepsilon})(1+e^{2\pi i(\beta+\varepsilon+\zeta)})+e^{2\pi i(\delta+2\varepsilon+2\zeta+2\beta)}] + e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)}J_{1u_3}(1 - e^{2\pi i\zeta})(1 + e^{2\pi i(\beta+\varepsilon+\zeta)}).$$

$$(50)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1u_1}(1 - e^{2\pi i\delta}) + e^{2\pi i\delta}J_{1u_2}(1 + e^{2\pi i(\beta+\varepsilon+\zeta)})(1 - e^{2\pi i\varepsilon}) + e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)}J_{1u_3}(1 - e^{2\pi i\zeta})(e^{2\pi i(2\beta+\varepsilon+2\zeta)}+e^{2\pi i(\beta+\varepsilon+\zeta)}+1)$$

(vgl. Formel (26) in § 4).

$$(51)\quad \bar{J}_{0u_3} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + J_{1u_1}(1 - e^{2\pi i\delta}) + e^{2\pi i\delta}J_{1u_2}(1 - e^{2\pi i\varepsilon})(1 + e^{2\pi i(\beta+\varepsilon+\zeta)}) + e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)}J_{1u_3}[(1-e^{2\pi i\zeta})(e^{2\pi i(2\beta+\varepsilon+2\zeta)}+e^{2\pi i(\beta+\varepsilon+\zeta)}+1)+e^{2\pi i(3\beta+\varepsilon+3\zeta)}].$$

Setzt man $\zeta = 0$, so entstehen aus (48), (49), (50) die Gleichungen (42), (43) und (44).

Wir wollen nun noch die Umlaufrelationen des entsprechenden allgemeineren Integrals ableiten:

$$\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-(x^m+1))^{\delta}(z-(x^n+1))^{\varepsilon}(z-(x^p+1))^{\zeta}\,dz,$$

wobei $p > n > m$ sein soll, d. h. $u_3 = x^p + 1$ liegt dem singulären Punkt 1 näher als $u_2 = x^n + 1$ und u_2 näher als $u_1 = x^m + 1$. u_3 macht p, u_2 n und u_1 m Umläufe um 1, wenn x einen Umlauf um 0 macht. Es ist nun:

$$\bar{J}_{au_1} = J_{au_1} + e^{2\pi i\delta}J_{u_1u_2} + \cdots + e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}J_{1u_1} + e^{2\pi i(\beta+2\delta+\varepsilon+\zeta)}J_{u_1u_2} + \cdots + e^{2\pi i(2\gamma+2\delta+2\varepsilon+2\zeta)}J_{1u_1} + \cdots + e^{2\pi im(\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)}J_{1u_1}$$

ferner:

$$\bar{J}_{a u_2} = J_{a u_1} + \cdots + e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)} J_{1 u_2} + \cdots + e^{2\pi i(n\beta+m\delta+n\varepsilon+n\zeta)} J_{1 u_2}$$

$$\bar{J}_{a 1} = J_{a u_1} + \cdots + e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)} J_{1 u_2} + \cdots + e^{2\pi i(\overline{p-1}\beta+m\delta+n\varepsilon+p\zeta)} J_{u_3 1}$$

$$\bar{J}_{a u_3} = \bar{J}_{a u_1} + \cdots + e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)} J_{1 u_2} + \cdots + e^{2\pi i(p\beta+m\delta+n\varepsilon+p\zeta)} J_{1 u_3}$$

folglich ist:

(52) $$\bar{J}_{0 u_1} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1)$$

$$+ J_{1 u_1}\Bigg[\overbrace{(1-e^{2\pi i\delta})\frac{e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}-1}}^{A} + e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}\Bigg]$$

$$+ e^{2\pi i\delta}\frac{e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}-1}[(1-e^{2\pi i\varepsilon})J_{1 u_2} + e^{2\pi i\varepsilon}J_{1 u_3}(1-e^{2\pi i\zeta})].$$

(53) $$\bar{J}_{0 u_2} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + AJ_{1 u_1} + J_{1 u_2}\Bigg[e^{2\pi i(n\beta+m\delta+n\varepsilon+n\zeta)}$$

$$\Bigg[+\overbrace{e^{2\pi i\delta}(1-e^{2\pi i\varepsilon})\frac{e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}-1} + e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}\frac{e^{2\pi i(n-m)(\beta+\varepsilon+\zeta)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\varepsilon+\zeta)}-1}}^{B}\Bigg]$$

$$+ J_{1 u_3}\overbrace{\Bigg[e^{2\pi i(\delta+\varepsilon)}(1-e^{2\pi i\zeta})\frac{e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}-1} + e^{2\pi i m(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta)}\frac{e^{2\pi i(n-m)(\beta+\varepsilon+\zeta)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\varepsilon+\zeta)}-1}(1-e^{2\pi i\zeta})\Bigg]}^{C}$$

(54) $$\bar{J}_{01} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + AJ_{1 u_1} + BJ_{1 u_2}$$

$$+ J_{1 u_3}\overbrace{\Bigg[C + e^{2\pi i(n\beta+m\delta+n\varepsilon+n\zeta)}\frac{e^{2\pi i(p-n)(\beta+\zeta)}-1}{e^{2\pi i(\beta+\zeta)}-1}(1-e^{2\pi i\zeta})\Bigg]}^{D}$$

(55) $$\bar{J}_{0 u_3} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + AJ_{1 u_1} + BJ_{1 u_2} + J_{1 u_3}[D + e^{2\pi i(p\beta+m\delta+n\varepsilon+p\zeta)}].$$

Setzt man $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$, so erhält man die Gleichungen (48), (49), (50) und (51), für $\zeta = 0$ die Formeln (45), (46) und (47).

Wir wollen auch hier die Umlaufrelationen des allgemeinen Typus von den im § 6 behandelten speziellen Integralen berechnen. Dieses Integral hat die Form (vgl. Einleitung S. 4):

§ 7. Das Integral

$$\int z^{\alpha}(z-1)^{\beta}(z-x)^{\gamma}(z-(x^{k_1}+1))^{\sigma_1}(z-(x^{k_2}+1))^{\sigma_2}\cdots(z-(x^{k_l}+1))^{\sigma_l}dz.$$

x soll einen positiven Umlauf um 0 machen; dann umkreisen die Funktionen $u_\lambda = x^{k_\lambda} + 1\,[\lambda = 1, 2, \cdots, l]$ k_λ-mal den singulären Punkt

1; dabei sind k_λ positive ganze Zahlen, und zwar wollen wir voraussetzen:

$$k_l > k_{l-1} > \cdots > k_2 > k_1.$$

u_l liegt also dem Punkt 1 am nächsten.

Es ist nach (37′):

$$\bar{J}_{0\alpha} = J_{0\alpha} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1).$$

Ferner ist:

$$(56)\quad \bar{J}_{\alpha 1} = J_{\alpha u_1} + e^{2\pi i\sigma_1} J_{u_1 u_2} + e^{2\pi i(\sigma_1+\sigma_2)} J_{u_2 u_3} + \cdots + e^{2\pi i \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda} J_{u_l 1}$$

$$+ e^{2\pi i\left(\beta + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)} J_{1 u_1} + \cdots\cdots\cdots + e^{2\pi i\left(\overline{k_1 - 1}\,\beta + k_1 \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)} J_{u_l 1}$$

$$+ e^{2\pi i k_1\left(\beta + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)} J_{1 u_2} + \cdots\cdots\cdots + e^{2\pi i\left(k_1\left(\beta + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \overline{k_2 - k_1} \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda + \overline{k_2 - k_1 - 1}\,\beta\right)} J_{u_l 1}$$

$$+ e^{2\pi i\left(k_1\left(\beta + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \overline{k_2 - k_1}\left(\beta + \sum_2^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)\right)} J_{1 u_3} + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ e^{2\pi i\left(k_1\left(\beta + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \overline{k_2 - k_1}\left(\beta + \sum_2^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \cdots + k_{l-1} - \overline{1 - k_{l-2}}\left(\beta + \sum_{l-1}^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)\right)} J_{1 u_l} + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ e^{2\pi i\left(k_1\left(\beta + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \overline{k_2 - k_1}\left(\beta + \sum_2^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \cdots + k_l - k_{l-1} \sum_l^l \lambda\, \sigma_\lambda + k_l - k_{l-1} - 1\,\beta\right)} J_{u_l 1}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite läßt sich auf dieselbe Weise zusammenfassen wie der für $\bar{J}_{10}$ auf Seite 24 dieser Arbeit.

Man erhält schließlich:

$$(57)\quad \bar{J}_{01} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma} - 1) + \sum_1^l{}_\omega \sum_1^\omega{}_\tau (1 - e^{2\pi i\sigma_\omega}) J_{1 u_\omega}$$

$$e^{2\pi i\left[\sum_\tau^{\omega-1} \sigma_\tau + \sum_1^{\tau-1}{}_\varrho (k_\varrho - k_{\varrho-1})\left(\beta + \sum_\varrho^l \sigma_\varrho\right)\right]} \frac{e^{2\pi i (k_\tau - k_{\tau-1})\left(\beta + \sum_\tau^l \sigma_\tau\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\beta + \sum_\tau^l \sigma_\tau\right)} - 1}.$$

Ferner ist:

$$\bar{J}_{au_\lambda} = J_{au_1} + e^{2\pi i\sigma_1} J_{u_1u_2} + e^{2\pi i(\sigma_1+\sigma_2)} J_{u_2u_3} + \cdots$$
$$+ e^{2\pi i\left(k_1\left(\beta+\sum_1^l{}_\lambda\sigma_\lambda\right)+\cdots+k_{\lambda-k_{\lambda-1}-1}\sum_\lambda^l{}_\lambda\sigma_\lambda+k_{\lambda-k_{\lambda-1}-1}\beta\right)} J_{u_\lambda 1}$$
$$+ e^{2\pi i\left(k_1\left(\beta+\sum_1^l{}_\lambda\sigma_\lambda\right)+\cdots+k_{\lambda-k_{\lambda-1}-1}\left(\beta+\sum_\lambda^n{}_\lambda\sigma_\lambda\right)\right)} J_{1u_\lambda}.$$

Daher ist:

$$\text{(58)}\qquad \bar{J}_{0u_\lambda} = J_{01} + J_{0x}(e^{2\pi i\gamma}-1) + e^{2\pi i\left(k_\lambda\beta+\sum_1^\lambda{}_\lambda k_\lambda\sigma_\lambda\right)} J_{1u_\lambda}$$
$$+\sum_1^\lambda{}_\omega\sum_1^\omega{}_\tau(1-e^{2\pi i\sigma_\omega})J_{1u_\omega} e^{2\pi i\left[\sum_\tau^{\omega-1}{}_\tau\sigma_\tau+\sum_1^{\tau-1}{}_\varrho(k_\varrho-k_{\varrho-1})\left(\beta+\sum_\varrho^l{}_\varrho\sigma_\varrho\right)\right]}\frac{e^{2\pi i(k_\tau-k_{\tau-1})\left(\beta+\sum_\tau^l{}_\tau\sigma_\tau\right)}-1}{e^{2\pi i\left(\beta+\sum_\tau^l{}_\tau\sigma_\tau\right)}-1}$$
$$+\sum_{\lambda+1}^l{}_\omega\sum_1^{\lambda+1}{}_\tau(1-e^{2\pi i\sigma_\omega})J_{1u_\omega} e^{2\pi i\left[\sum_\tau^{\omega-1}{}_\tau\sigma_\tau+\sum_1^{\tau-1}{}_\varrho(k_\varrho-k_{\varrho-1})\left(\beta+\sum_\varrho^l{}_\varrho\sigma_\varrho\right)\right]}\frac{e^{2\pi i(k_\tau-k_{\tau-1})\left(\beta+\sum_\tau^l{}_\tau\sigma_\tau\right)}-1}{e^{2\pi i\left(\beta+\sum_\tau^l{}_\tau\sigma_\tau\right)}-1}.$$

Aus den in den §§ 6—7 gefundenen Umlaufrelationen ersehen wir, daß sich sowohl $\bar{J}_{01}$ wie auch $\bar{J}_{0u_\lambda}$ linear homogen zusammensetzen aus sämtlichen im jeweiligen Fall vorkommenden Grundintegralen; es besteht also hier kein so einfaches Bildungsgesetz wie für die in den §§ 2—5 behandelten Integralen; jedoch ist es ganz evident, daß dieses einfache Bildungsgesetz für die Integrale $\bar{J}_{1u_\lambda}$ Gültigkeit hat.

Drittes Kapitel.

Das allgemeine Integral.

§ 8. Aufstellung des allgemeinen Integrals und Verhalten desselben bei Umläufen.

Der bei der Verallgemeinerung der Integrale zugrunde liegende Gedanke tritt schon bei der Bildung der speziellen Beispiele hervor und wurde auch dort schon erwähnt. Wir führen immer mehr Singularitäten ein und lassen immer mehr Punkte z_ν bzw. u_λ (wandernde Ver-

zweigungspunkte) um zwei feste Verzweigungspunkte herum, die zugleich singuläre Punkte sind, zusammenrücken. (Vgl. Einleitung S. 4.) Daß wir diese beiden festen Verzweigungspunkte mit den Punkten 0 und a_μ zusammenfallen lassen, ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da wir ja stets durch die lineare Transformation $x = \frac{\bar{x} - b}{c - b} a_\mu$ zwei beliebige Punkte b und c der $\bar{x}$-Ebene in die Punkte 0 und a_μ der x-Ebene transformieren können. Wir haben bereits in § 5 den allgemeinen Typus der speziellen Integrale der §§ 2—4 und in § 7 den allgemeinen Typus der speziellen Integrale von § 6 aufgestellt; das erstere liefert beim Umlauf von x um 0 die stärkste Wegdeformation in der Umgebung der Stelle 0, das letztere in der Umgebung des Punktes 1 — statt des Punktes 1 führen wir jetzt den Punkt a_μ ein. Durch Kombination der beiden Formen ergibt sich demnach das allgemeinste Integral der betrachteten Art, d. h. das Integral, das beim Umlauf von x um 0 das allgemeinste Verhalten aufweist. Dieses Integral hat daher die Form:

$$(1) \qquad \int z^\alpha (z - a_\mu)^{\alpha_\mu} (z - x)^\xi \prod_1^n (z - z_\nu)^{\varrho_\nu} \prod_1^l (z - u_\lambda)^{\sigma_\lambda} \varphi(z)\, dz \,^1),$$

wobei $\varphi(z)$ denselben Charakter hat wie $(z - a_\mu)^{\alpha_\mu} \prod_1^l (z - u_\lambda)^{\sigma_\lambda}$, nur andere singuläre Punkte a_μ besitzt. Die Funktionen z_ν und u_λ sind ganze rationale Funktionen von x, und zwar von der Beschaffenheit, daß die z_ν h_ν-mal den Punkt 0 und die u_λ k_λ-mal den singulären Punkt a_μ umkreisen, also die Form haben müssen:

$$(2) \qquad z_\nu = x^{h_\nu} r_\nu(x) \quad \text{und} \quad u_\lambda = a_\mu + x^{k_\lambda} s_\lambda(x),$$

wobei die $r_\nu(x)$ und $s_\lambda(x)$ wiederum ganze rationale Funktionen von x sind, deren konstantes Glied von null verschieden ist. Die h_ν und k_λ sind positive ganze Zahlen, und zwar sei:

$$h_n \geqq h_{n-1} \geqq \cdots \geqq h_1 \quad \text{und} \quad k_l \geqq k_{l-1} \geqq \cdots \geqq k_1 .$$

Sind zwei h_ν oder k_λ einander gleich, so gelten auch hier für die betreffenden z_ν bzw. u_λ beim Umlauf die bereits in der Anmerkung auf Seite 25 gemachten Bemerkungen.

Um J_{0a_μ}, J_{0z_ν}, J_{0u_λ} zu bestimmen, berechnen wir zunächst J_{a0}, J_{az_ν}, J_{aa_μ} und J_{au_λ}.

1) Der Faktor $(z - x)^\xi$, der als Spezialform von $(z - z_\nu)^{\varrho_\nu}$ aufgefaßt werden könnte, ist explizit nötig, um den Punkt a_μ zum singulären Punkt des Integrals zu machen.

Es ist:

3) $$\bar{J}_{a0} = J_{ax} + e^{2\pi i \xi} J_{x z_1} + e^{2\pi i(\xi+\varrho_1)} J_{z_1 z_2} + \cdots + e^{2\pi i\left(\xi + \sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{z_n 0}$$

$$- e^{2\pi i\left(\alpha+\xi+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{0 z_1} + e^{2\pi i\left(\alpha+\xi+\varrho_1+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{z_1 z_2} + \cdots + e^{2\pi i\left(\xi+\alpha+2\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{z_n 0}$$

$$- e^{2\pi i\left(\xi+2\alpha+2\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{0 z_1} + \cdots\cdots\cdots + e^{2\pi i\left(\xi+h_1-1\,\alpha+h_1\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{z_n 0}$$

$$- e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)\right)} J_{0 z_2} + e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\varrho_2\right)} J_{z_2 z_3} + \cdots + e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{z_n 0}$$

$$- e^{2\pi i\left(\xi+\alpha+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)} J_{0 z_2} + \cdots + e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\overline{h_2-h_1}\sum_2^n \nu \varrho_\nu+h_2-h_1-1\,\alpha\right)} J_{z_n 0}$$

$$- e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\overline{h_2-h_1}\left(\alpha+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)\right)} J_{0 z_3} + \cdots\cdots\cdots$$

$$e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\overline{h_2-h_1}\left(\alpha+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)+\cdots+h_{n-1}-h_{n-2}\left(\alpha+\sum_{n-1}^n \nu \varrho_\nu\right)\right)} J_{0 z_n} + \cdots$$

$$e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+h_2-h_1\left(\alpha+\sum_2^n \nu \varrho_\nu\right)+\cdots+h_n-h_{n-1}-1\left(\alpha+\sum_n^n \nu \varrho_\nu\right)\right)} J_{0 z_n}$$

$$e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\cdots+h_n-\overline{h_{n-1}}\sum_n^n \nu \varrho_\nu+h_n-h_{n-1}-1\,\alpha\right)} J_{z_n 0}.$$

Ferner ist:

(4) $$\bar{J}_{a z_\nu} = J_{ax} + e^{2\pi i \xi} J_{x z_1} + \cdots$$

$$+ e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\cdots+\overline{h_\nu-h_{\nu-1}}\sum_\nu^n \nu \varrho_\nu+\overline{h_\nu-h_{\nu-1}-1}\,\alpha\right)} J_{z_n 0}$$

$$+ e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^n \nu \varrho_\nu\right)+\cdots+\overline{h_\nu-h_{\nu-1}}\left(\alpha+\sum_\nu^n \nu \varrho_\nu\right)\right)} J_{0 z_\nu}.$$

Für $\bar{J}_{a a_\mu}$ und $\bar{J}_{a u_\lambda}$ ergeben sich ganz analoge Formeln (ξ ist 0 zu setzen). An die Stelle von:

$$0 \quad \alpha \quad z_\nu \quad h_\nu \quad \varrho_\nu$$

tritt:

$$a_\mu \quad \alpha_\mu \quad u_\lambda \quad k_\lambda \quad \sigma_\lambda.$$

Nun ist:

$$\bar{J}_{0 z_\nu} = \bar{J}_{0 \alpha} + \bar{J}_{\alpha z_\nu}.$$

Bei der Zusammenfassung fallen alle Glieder weg bis zu den Integralen $\bar{J}_{0 z_\nu}$ und $\bar{J}_{0 z_{\nu+1}}$, die multipliziert sind mit dem Faktor:

$$e^{2\pi i\left(h_1\left(\alpha+\sum_1^{\nu}\varrho_\nu\right)+\overline{h_2-h_1}\left(\alpha+\sum_2^{n}\varrho_\nu\right)+\cdots+\overline{h_\nu-h_{\nu-1}}\left(\alpha+\sum_\nu^{n}\varrho_\nu\right)+\xi\right)}.$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}
\bar{J}_{0 z_\nu} = e^{2\pi i\left(\xi+h_1\left(\alpha+\sum_1^{n}\varrho_\nu\right)+\cdots+\overline{h_\nu-h_{\nu-1}}\left(\alpha+\sum_\nu^{n}\varrho_\nu\right)\right)} \\
\Bigg\{ J_{0 z_\nu} - \Bigg[J_{0 z_{\nu+1}} + e^{2\pi i \varrho_{\nu+1}} J_{z_{\nu+1} z_{\nu+2}} + \cdots + e^{2\pi i \sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu} J_{z_n 0} \\
+ e^{2\pi i\left(\alpha+\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)} J_{0 z_{\nu+1}} + \cdots + e^{2\pi i\left(h_{\nu+1}-\overline{h_{\nu-1}}\alpha+h_{\nu+1}-\overline{h_\nu}\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)} J_{z_n 0} \\
+ e^{2\pi i\left(h_{\nu+1}-h_\nu\left(\alpha+\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)\right)} J_{0 z_{\nu+2}} + \cdots\cdots\cdots \\
+ e^{2\pi i\left(\overline{h_{\nu+1}-h_\nu}\left(\alpha+\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)+\cdots+\overline{h_n-h_{n-1}}\sum_{n}^{n}\varrho_\nu+h_n-\overline{h_{n-1}}\alpha\right)} J_{z_n 0} \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
\bar{J}_{0 z_\nu} = e^{2\pi i(\xi+h_1\varrho_1+h_2\varrho_2+\cdots h_\nu\varrho_\nu)} \Bigg\{ J_{0 z_\nu} + J_{0 z_{\nu+1}} \Big[-1 + e^{2\pi i \varrho_{\nu+1}} \\
- e^{2\pi i\left(\alpha+\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)} \pm \cdots + e^{2\pi i\left(\varrho_{\nu+1}+h_{\nu+1}-h_\nu-1\left(\alpha+\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)\right)} \Big] \\
+ J_{0 z_{\nu+2}} \Big[e^{2\pi i \varrho_{\nu+1}} \Big(-1 + e^{2\pi i \varrho_{\nu+2}} - e^{2\pi i\left(\alpha+\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)} \pm \cdots + e^{2\pi i\left(\varrho_{\nu+2}+\overline{h_{\nu+1}-h_\nu-1}\left(\alpha+\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)\right.} \\
+ e^{2\pi i\left(\overline{h_{\nu+1}-h_\nu}\left(\alpha+\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)\right)} \Big) \Big(-1 + e^{2\pi i \varrho_{\nu+2}} - e^{2\pi i\left(\alpha+\sum_{\nu+2}^{n}\varrho_\nu\right)} \pm \cdots \\
+ e^{2\pi i\left(\varrho_{\nu+2}+\overline{h_{\nu+2}-h_{\nu+1}-1}\left(\alpha+\sum_{\nu+1}^{n}\varrho_\nu\right)\right)} \Big) \Big] \\
+ J_{0 z_{\nu+3}} \Big[e^{2\pi i(\varrho_{\nu+1}+\varrho_{\nu+2})} (-1 \pm \cdots) \cdots \Big] \text{ usw.} \Bigg\}
\end{aligned}$$

oder:

(5)
$$\bar{J}_{0\,z_\nu} = e^{2\pi i(\xi + h_1\varrho_1 + \cdots + h_\nu\varrho_\nu)}$$

$$\Bigg\{ J_{0\,z_\nu} + (e^{2\pi i\varrho_{\nu+1}} - 1)\, J_{0\,z_{\nu+1}} \frac{e^{2\pi i(h_{\nu+1}-h_\nu)\left(\alpha + \sum_{\nu+1}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha + \sum_{\nu+1}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}$$

$$+ (e^{2\pi i\varrho_{\nu+2}} - 1)\, J_{0\,z_{\nu+2}} \Bigg[e^{2\pi i\varrho_{\nu+1}} \frac{e^{2\pi i(h_{\nu+1}-h_\nu)\left(\alpha + \sum_{\nu+1}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha + \sum_{\nu+1}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}$$

$$+ e^{2\pi i(h_{\nu+1}-h_\nu)\left(\alpha + \sum_{\nu+2}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} \frac{e^{2\pi i(h_{\nu+2}-h_{\nu+1})\left(\alpha + \sum_{\nu+2}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha + \sum_{\nu+2}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1} \Bigg] + \cdots$$

$$+ (e^{2\pi i\varrho_n} - 1)\, J_{0\,z_n} \Bigg[e^{2\pi i\sum_{\nu+1}^{n-1}\nu\varrho_\nu} \frac{e^{2\pi i(h_{\nu+1}-h_\nu)\left(\alpha + \sum_{\nu+1}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha + \sum_{\nu+1}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}$$

$$+ e^{2\pi i\left[(h_{\nu+1}-h_\nu)\left(\alpha + \sum_{\nu+1}^{n}\nu\varrho_\nu + \sum_{\nu+2}^{n-1}\nu\varrho_\nu\right)\right]} \frac{e^{2\pi i(h_{\nu+2}-h_{\nu+1})\left(\alpha + \sum_{\nu+2}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha + \sum_{\nu+2}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}$$

$$+ e^{2\pi i\left[(h_{\nu+1}-h_\nu)\left(\alpha + \sum_{\nu+1}^{n}\nu\varrho_\nu\right) + (h_{\nu+2}-h_{\nu+1})\left(\alpha + \sum_{\nu+2}^{n}\nu\varrho_\nu\right) + \sum_{\nu+3}^{n-1}\nu\varrho_\nu\right]} \frac{e^{2\pi i(h_{\nu+3}-h_{\nu+2})\left(\alpha + \sum_{\nu+3}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha + \sum_{\nu+3}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1} + \cdots$$

$$+ e^{2\pi i\left[(h_{\nu+1}-h_\nu)\left(\alpha + \sum_{\nu+1}^{n}\nu\varrho_\nu\right) + \cdots + (h_{n-1}-h_{n-2})\left(\alpha + \sum_{n-1}^{n}\nu\varrho_\nu\right)\right]} \frac{e^{2\pi i(h_n - h_{n-1})\left(\alpha + \sum_{n}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha + \sum_{n}^{n}\nu\varrho_\nu\right)} - 1} \Bigg] \Bigg\},$$

oder:

$$(6)\quad \bar{J}_{0z_\nu} = e^{2\pi i\left(\xi + h_\nu \alpha + \sum_1^{\nu} \omega h_\omega \varrho_\omega\right)} \left\{ J_{0z_\nu} + \sum_{\nu+1}^{n} \sum_{\nu+1}^{\omega} (e^{2\pi i \varrho_\omega} - 1) J_{0z_\omega} \right.$$

$$\left. e^{2\pi i\left[\sum_{\tau}^{\omega-1} \varrho_\tau + \sum_{\nu+1}^{\tau-1} \lambda (h_\lambda - h_{\lambda-1}) \left(\alpha + \sum_{\lambda}^{n} \varrho_\lambda\right)\right]} \frac{e^{2\pi i (h_\tau - h_{\tau-1})\left(\alpha + \sum_{\tau}^{n} \varrho_\tau\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha + \sum_{\tau}^{n} \varrho_\tau\right)} - 1} \right\}^{1)}.$$

Das ist das allgemeine Bildungsgesetz für die Integrale J_{0z_ν}; es läßt sich in der Form des folgenden Schemas schreiben:

$$(7)\quad \begin{cases} \bar{J}_{0z_1} = a_{1n} J_{0z_n} + a_{1,n-1} J_{0z_{n-1}} + \cdots + a_{11} J_{0z_1} \\ \bar{J}_{0z_2} = a_{2n} J_{0z_n} + a_{2,n-1} J_{0z_{n-1}} + \cdots + a_{22} J_{0z_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{J}_{0z_\nu} = a_{\nu n} J_{0z_n} + a_{\nu,n-1} J_{0z_{n-1}} + \cdots + a_{\nu\nu} J_{0z_\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_{0z_{n-1}} = a_{n-1,n} J_{0z_n} + a_{n-1,n-1} J_{0z_{n-1}} \\ J_{0z_n} = a_{nn} J_{0z_n} \end{cases}$$

oder:

$$\bar{J}_{0z_\nu} = \sum_{\nu}^{n} a_{\nu\mu} J_{0z_\mu} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

Wir sehen, es gibt stets eines unserer bestimmten Integrale, das sich beim Umlauf rein multiplikativ verhält; das ist das Integral, welches sich von der umkreisten Stelle 0 bis zu der diesem Punkt am nächsten gelegenen Stelle z_ν erstreckt. Allgemein setzt sich das Integral J_{0z_ν} nach dem Umlauf linear homogen aus den Integralen J_{0z_μ} für $\mu = \nu, \nu+1, \nu+2, \cdots, n-1, n$ zusammen, d. h. aus J_{0z_ν} selbst und aus den Integralen, die von 0 ausgehen und sich nach den zwischen 0 und z_ν liegenden Verzweigungspunkten erstrecken. Die Relationen sind unabhängig von den Integralen J_{0u_λ}; die Koeffizienten $a_{\nu\mu}$ $[\nu = 1, 2, \cdots, n;\ \mu = \nu, \nu+1, \cdots, n]$ des Gleichungssystems (7) sind nur ab-

1) Dabei ist $\sum_{m}^{n} \nu a_\nu = 0$, sobald $n < m$.

hängig von den Exponenten α, h_ν, ϱ_ν und ξ. Dieses Gesetz finden wir, wie bereits erwähnt, an den Beispielen in den §§ 2—5 bestätigt.

Wir wollen nun auch das Integral $\bar{J}_{a0}$ in geschlossener Form darstellen. Es ist:

$$(8)\quad \bar{J}_{0a} = J_{0a} + J_{0x}(e^{2\pi i\xi} - 1) + \sum_1^n{}^{\omega} \sum_1^{\omega} {}^{z} \text{ [derselbe Ausdruck wie in § 6].}$$

Ferner ist:

$$J_{au_\lambda} = J_{aa_\mu} + J_{a_\mu u_1}\Bigg[1 - e^{2\pi i\sigma_1} + e^{2\pi i\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)} \mp \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{k_1 - 1}\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sigma_1\right)}\Bigg]$$

$$+ J_{a_\mu u_2}\Bigg[e^{2\pi i\sigma_1}\left(1 - e^{2\pi i\sigma_2} + e^{2\pi i\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)} \mp \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{k_1 - 1}\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sigma_2\right)}\right)$$

$$+ e^{2\pi i\left(k_1\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sigma_1\right)}\left(1 - e^{2\pi i\sigma_2} \pm \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{k_2 - k_1 - 1}\left(\alpha_\mu + \sum_2^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sigma_2\right)}\right)\Bigg]$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + J_{a_\mu u_\lambda}[\cdots\cdots\cdots]$$

$$+ e^{2\pi i\left(k_1\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \overline{k_2 - k_1}\left(\alpha_\mu + \sum_2^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \cdots + \overline{k_\lambda - k_{\lambda-1}}\left(\alpha_\mu + \sum_\lambda^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)\right)} J_{a_\mu u_\lambda}$$

$$+ J_{a_\mu u_{\lambda+1}}\Bigg[e^{2\pi i\sum_1^\lambda \lambda\, \sigma_\lambda}\left(1 - e^{2\pi i\sigma_{\lambda+1}} \pm \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{k_1 - 1}\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sigma_{\lambda+1}\right)}\right)$$

$$+ e^{2\pi i\left(k_1\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sum_2^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)}\left(1 - e^{2\pi i\sigma_{\lambda+1}} \pm \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{k_2 - k_1 - 1}\left(\alpha_\mu + \sum_2^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sigma_{\lambda+1}\right)}\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots + e^{2\pi i\left(k_1\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \cdots + \overline{k_{\lambda-1} - k_{\lambda-2}}\left(\alpha_\mu + \sum_{\lambda-1}^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)\right)}$$

$$\cdot\left(1 - e^{2\pi i\sigma_{\lambda+1}} \pm \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{k_\lambda - k_{\lambda-1} - 1}\left(\alpha_\mu + \sum_\lambda^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sigma_{\lambda+1}\right)}\right)\Bigg] + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ J_{a_\mu u_l}\Bigg[e^{2\pi i\sum_1^{l-1} \lambda\sigma_\lambda}\left(1 - e^{2\pi i\sigma_{\lambda+1}} \pm \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{k_1 - 1}\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\sigma_\lambda\right) + \sigma_l\right)}\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots + e^{2\pi i\left(k_1\left(\alpha_\mu + \sum_1^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \cdots + \overline{k_{\lambda-1} - k_{\lambda-2}}\left(\alpha_\mu + \sum_{\lambda-1}^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sum_\lambda^l \lambda\, \sigma_\lambda\right)}$$

$$\cdot\left(1 - e^{2\pi i\sigma_l} \pm \cdots - e^{2\pi i\left(\overline{k_\lambda - k_{\lambda-1} - 1}\left(\alpha_\mu + \sum_\lambda^l \lambda\, \sigma_\lambda\right) + \sigma_\lambda\right)}\right)\Bigg] .$$

oder:

$$(9)\qquad \bar{J}_{a u_\lambda} = J_{a0} + J_{0 a_\mu} + e^{2\pi i\left(k_\lambda \alpha_\mu + \sum_1^\lambda {}_\lambda\, k_\lambda \sigma_\lambda\right)} J_{a_\mu u_\lambda}$$

$$+ \sum_1^\lambda{}_\omega \sum_1^\omega{}_\tau (1 - e^{2\pi i \sigma_\omega}) J_{a_\mu u_\omega} e^{2\pi i\left(\sum_\tau^{\omega-1} \sigma_\tau + \sum_1^{\tau-1}{}_\varrho\, (k_\varrho - k_{\varrho-1})\left(\alpha_\mu + \sum_\varrho^{l}{}_\varrho\, \sigma_\varrho\right)\right)} \frac{e^{2\pi i (k_\tau - k_{\tau-1})\left(\alpha_\mu + \sum_\tau^{l}{}_\tau\, \sigma_\tau\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha_\mu + \sum_\tau^{l}{}_\tau\, \sigma_\tau\right)} - 1}$$

$$+ \sum_{\lambda+1}^{l}{}_\omega \sum_1^{\lambda+1}{}_\tau (1 - e^{2\pi i \sigma_\omega}) J_{a_\mu u_\omega} e^{2\pi i\left(\sum_\tau^{\omega-1} \sigma_\tau + \sum_1^{\tau-1}{}_\varrho\, (k_\varrho - k_{\varrho-1})\left(\alpha_\mu + \sum_\varrho^{l}{}_\varrho\, \sigma_\varrho\right)\right)} \frac{e^{2\pi i (k_\tau - k_{\tau-1})\left(\alpha_\mu + \sum_\tau^{l}{}_\tau\, \sigma_\tau\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha_\mu + \sum_\tau^{l}{}_\tau\, \sigma_\tau\right)} - 1}$$

Durch Addition der Gleichungen (8) und (9) erhält man $\bar{J}_{0 u_\lambda}$ ausgedrückt durch die Integrale $J_{0 z_\nu}$, $J_{0 a_\mu}$ und $J_{a_\mu u_\lambda}$; sollen alle vorkommenden Integrale von 0 ausgehen, so hat man $J_{a_\mu u_\lambda}$ nur zu zerlegen in $J_{a_\mu 0}$ und $J_{0 u_\lambda}$. Wie sich bereits bei den speziellen Beispielen ergab, ist das Bildungsgesetz für $\bar{J}_{0 a}$ und $\bar{J}_{0 u_\lambda}$ nicht so einfach wie für die Integrale $\bar{J}_{0 z_\nu}$, sie setzen sich vielmehr aus sämtlichen Grundintegralen homogen linear zusammen.

Endlich ergibt sich für $\bar{J}_{0 a_\mu}$ der Wert:

$$(10)\qquad \bar{J}_{0 a_\mu} = J_{0 a_\mu} + J_{0 x}(e^{2\pi i \xi} - 1)$$

$$+ \sum_1^n{}_\omega \sum_1^\omega{}_\tau (e^{2\pi i \varrho_\omega} - 1) J_{0 z_\omega} e^{2\pi i\left(\sum_\tau^{\omega-1} \varrho_\tau + \sum_1^{\tau-1}{}_\lambda\, (h_\lambda - h_{\lambda-1})\left(\alpha + \sum_\lambda^{n}{}_\lambda\, \varrho_\lambda\right)\right)} \frac{e^{2\pi i (h_\tau - h_{\tau-1})\left(\alpha + \sum_\tau^{n}{}_\tau\, \varrho_\tau\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha + \sum_\tau^{n}{}_\tau\, \varrho_\tau\right)} - 1}$$

$$+ \sum_1^l{}_\omega \sum_1^\omega{}_\tau (1 - e^{2\pi i \sigma_\omega}) J_{a_\mu u_\omega} e^{2\pi i\left(\sum_\tau^{\omega-1} \sigma_\tau + \sum_1^{\tau-1}{}_\varrho\, (k_\varrho - k_{\varrho-1})\left(\alpha_\mu + \sum_\varrho^{l}{}_\varrho\, \sigma_\varrho\right)\right)} \frac{e^{2\pi i (k_\tau - k_{\tau-1})\left(\alpha_\mu + \sum_\tau^{l}{}_\tau\, \sigma_\tau\right)} - 1}{e^{2\pi i\left(\alpha_\mu + \sum_\tau^{l}{}_\tau\, \sigma_\tau\right)} - 1}$$

Lebenslauf.

Ich, Siegfried Weikersheimer, isr. Konfession, Sohn des Landwirts Lippmann Weikersheimer und seiner verstorbenen Ehefrau Natalie geb. Ries, bin zu Großlangheim, Bezirksamt Kitzingen, am 22. November 1890 geboren. In Großlangheim besuchte ich die Volksschule. 1906 absolvierte ich die Realschule in Kitzingen und erhielt 1909 von der Oberrealschule in Nürnberg das Zeugnis der Reife. Im Oktober 1909 bezog ich auf zwei Semester die Universität München, um mich dem Studium der Mathematik und Physik zu widmen. Vom W.-S. 1910/11 bis zum S.-S. 1913 setzte ich meine Studien an der Universität Würzburg fort und bin jetzt dem pädagogisch-didaktischen Seminar am Realgymnasium in Würzburg zugewiesen.

In München hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren: Doehlemann, Graetz, Lindemann und Voß; in Würzburg: Bulle, Cantor, Harms, Hilb, Manchot, Marbe, Rost, G. von Schanz, Staehlin, von Weber und Wien. Herrn Professor Hilb, der mir das Thema zur vorliegenden Arbeit überließ und das Entstehen derselben jederzeit mit größtem Interesse verfolgte und förderte, sage ich auch an dieser Stelle meinen innigsten Dank. Besonderen Dank schulde ich ferner Herrn Professor Rost für die mir gegebenen zweckdienlichen Ratschläge.

Die mündliche Prüfung fand am 4. Februar 1914 statt.